В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. РУРУКИН

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по

Алгебре и началам анализа

к УМК А.Н. Колмогорова

10 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК

А.Н. Колмогорова и др.
(М.: Просвещение)

10 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2011

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н.

Р87 Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. – М.: ВАКО, 2011. – 352 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00288-7

Издание представляет собой подробные поурочные разработки по алгебре и началам анализа для 10 класса к УМК А.Н. Колмогорова и др. (М.: Просвещение) и содержит все, что необходимо педагогу для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, тесты, подробный разбор контрольных и зачетных работ. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 10 класса по предмету, но и целенаправленно подготовиться к сдаче экзамена (по задачам трех групп сложности).

Пособие будет полезно как начинающим педагогам, так и преподавателям со стажем.

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00288-7

Предисловие

В 10 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – начала математического анализа. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену такое понимание будет способствовать освоению высшей математики в вузе. Также в этом классе продолжается изучение алгебры: детально рассматриваются тригонометрические функции, уравнения и неравенства. Такой материал крайне необходим при изучении точных наук в вузе.

10 класс необходимо рассматривать как целенаправленную подготовку к сдаче ЕГЭ, так как варианты этого экзамена содержат значительное количество задач, содержащих изучаемый материал.

Поэтому данное пособие преследует три цели: изучить материал по алгебре и началам анализа для 10 класса, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для учебника А.Н. Колмогорова, А.М. Абрамова и др. (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для этого учебника.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: более детально повторены основные тригонометрические формулы и их применение; даны дополнительные типы тригонометрических уравнений и неравенств, построение более сложных графиков; расширены представления о пределе функции, использовании производной в алгебраических, геометрических и физических задачах. Такое расширение материала вполне доступно для десятиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные работы и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется или учителем, или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора у учащихся. В пособии приведены 7 контрольных работ.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки нужно решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Между контрольной и зачетной работой предусмотрено несколько уроков для коррекции знаний учащихся. Приведены 2 зачетные работы по темам.

В конце обучения предусмотрена итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы даны с полным разбором всех задач всех вариантов. Решения лучше размещать на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты в пособии не предусмотрены, так как, на наш взгляд, они малоэффективны при обучении, но отнимают значительное время от уроков.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит **исключительно рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются **подготовленность** класса, его **работоспособность, интерес к изучению алгебры**. Поэтому ни одно планирование не может являться **догмой**. Весь ход урока должен **способствовать обучению школьников**. На наш взгляд, пусть каждый отдельный школьник лучше **усвоит** тот **материал**, который **в состоянии понять, чем не поймет ничего**. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает **комплекс неполноценности**, к выполнению домашнего задания **привлекаются все домочадцы, возникают списывание, подсказки, шпаргалки** и т. д. В итоге **результаты ужасающие** – ЕГЭ по математике сдается школьниками хуже всех других предметов (примерно 20% выпускников пишут его на «двойку»).

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, – наличие **нескольких** различных **вариантов обучения** (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение). При этом некоторые варианты обучения предусматривают **использование дополнительных** учебных **пособий**.

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия с использованием только **одного базового** учебника (102 часа в год). **Содержание** уроков является **избыточным** (в расчете на очень сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается достаточно поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает на максимальный вариант (136 часов в год). Учитывая сложность материала, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании **сдвоенные уроки** математики.

Поурочное планирование включает в себя **четыре вида занятий**:

1. Урок на изучение нового материала.
2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок на изучение нового материала включает в себя семь этапов.

I. **Сообщение темы и цели занятий** делает учитель (~1–2 минуты). Требуется донести до учащихся **необходимость** изучения данной темы (**области применения** этих знаний) и **цель урока** (**навыки и приемы**, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. **Изучение нового материала (основные понятия)** (~15 минут) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя **школьники самостоятельно** (при фронтальной работе) приходят **к формулировке основных понятий и правил** рассматриваемого раздела алгебры. Затем **учитель уточняет и корректирует** эти результаты. Однако, учитывая, что изучение анализа начинается именно в 10 классе и все понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать **лишь для** самых **простых тем** либо отдельных **фрагментов урока**.

2. **Учитель формулирует** основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. **Контрольные вопросы** по изучаемому материалу **задает учитель** для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 минут). Вопросы могут задаваться как **индивидуально**, так и **фронтально**. Следует обратить внимание именно **на понимание** понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется **кроме определения** попросить учащегося **привести соответствующие примеры**. В случае затруднения такие примеры могут привести **другие школьники или учитель**.

IV. **Задание на уроке** дает учитель из **числа** наиболее **характерных, типовых задач** (~15 минут). Задание может выполняться:

1. **Самостоятельно учащимися всего класса** в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная **работа всех учащихся: поиск ошибок** в решении на доске, **вопросы** по решению, **другие способы** решения и т. д.

2. **В виде диалога учащихся** на одной парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения.

3. **В виде работы у доски** одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и **диалог учителя с отвечающим у доски**.

V. **Задание на дом** дается учителем из числа типовых задач, **аналогичных рассмотренным в классе**. Задание должно быть рассчитано на 60–80 минут. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены **разные способы решения задачи**. Это приводит к **активизации мышления** школьников, **творческому пониманию** материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников **фиксировать непонятый материал**: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников **формулировать, что именно им не понятно**. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в вузе. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо **разобрать на ближайшем занятии** по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или **большей сложностью** или **новым способом решения**. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) **на внеклассных занятиях** (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) **со всеми учащимися** как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с **наиболее подготовленными** школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) **во время** проведения математических боев, **олимпиад**, недель математики и т. д.

VII. **Подведение итогов урока** (~1–2 минуты) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности **выставляются оценки с их кратким обоснованием**.

Урок на отработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено **повторение и закрепление пройденного материала** (~20 минут). Прежде всего, оно включает **ответы на вопросы по домашнему заданию**. Желательно, чтобы такие ответы давались самими **учащимися** класса. Вопросы могут включать в себя непонятые понятия, определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость **разбора нерешенных задач**.

В этой части урока желательна **максимальная активность** всего класса. Школьник, **объясняя и комментируя** свое решение задачи, **лучше усваивает** изучаемый материал. Кроме того, его **объяснения могут оказаться более удобными** для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 минут.

На второй стадии этого этапа предусмотрен **контроль усвоения материала** (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 минут.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание **на его понимание**, а не на строгость и четкость формулировок (тем более, что строгие формулировки некоторых понятий будут даны только в вузе).

Самостоятельная работа включает 2–3 типовых, характерных задачи.

В материалах уроков **тесты используются в небольшом количестве** для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование **не дает возможности выявить причину ошибки**: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д.

По каждой изучаемой теме приводятся несколько **контрольных работ**. Они составлены **в шести вариантах различной сложности** (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Вариант содержит **6 задач**, из которых **две последние** чуть **сложнее предыдущих**. Как правило, **задачи** вариантов **подобны** задачам, **решаемым в классе и дома**. Выбор вариантов может быть сделан или **самими учащимися** (с учетом их самооценки), или **учителем** (с учетом успехов школьника).

Оцениваться контрольная работа может следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». **Шестая задача** дает учащимся некоторую **свободу выбора и определенный резерв**. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана **на два урока** (на наш взгляд, это **оптимальное время** на написание работы). Изучаемый в 10 классе материал достаточно сложен. Для решения предлагаемых задач требуется время на размышление. Поэтому **одного урока** на проведение контрольной работы **не достаточно**. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводится ее **анализ и разбор** наиболее сложных **задач**. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у учащихся, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, на последнем занятии проводится письменный тематический зачет. Ему предшествует урок на повторение данной темы.

Тематический зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа А – самые простые задачи, группа В – более сложные задачи и группа С – самые сложные задачи). Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Заметим, что по тематическому планированию (см. далее) материал I и IV разделов в значительной степени перекликается и достаточно искусственно распределен между этими разделами. Поэтому первые 17 уроков пособия изложены исходя из логики данной темы.

Тематическое планирование учебного материала

I вариант: 2 часа в 1-м полугодии, 3 часа во 2-м полугодии, всего 86 часов.

II вариант: 3 часа, всего 102 часов.

III вариант: 4 часа, всего 136 часов.

I. Тригонометрические функции любого угла (I вариант – 6 ч, II вариант – 6 ч, III вариант – 7 ч)

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса (2 ч; 2 ч; 2 ч)

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Радианная мера угла (2 ч; 2 ч; 2 ч)

II. Основные тригонометрические формулы (8 ч; 9 ч; 10 ч)

Соотношения между тригонометрическими функция одного и того же угла (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Формулы приведения (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 1 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

III. Формулы сложения и их следствия (6 ч; 7 ч; 8 ч)

Формулы сложения. Формулы двойного угла (6 ч; 7 ч; 8 ч)

Формулы суммы и разности тригонометрических функций (2 ч; 3 ч; 3 ч)

IV. Тригонометрические функции числового аргумента (5 ч; 6 ч; 8 ч)

Синус, косинус, тангенс и котангенс (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Тригонометрические функции и их графики (2 ч; 3 ч; 4 ч)

Контрольная работа № 2 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

V. Основные свойства функций (12 ч; 13 ч; 16 ч)

Функции и их графики (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций (2ч; 2 ч; 3 ч)

Возрастание и убывание функций. Экстремумы (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Исследование функций (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 3 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

VI. Решение тригонометрических уравнений и неравенств (11 ч; 13 ч; 13 ч)

Арксинус, арккосинус и арктангенс (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Решение простейших тригонометрических уравнений (2 ч; 3 ч; 2 ч)

Решение простейших тригонометрических неравенств (2 ч; 2 ч; 2 ч)

Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений (2 ч; 5 ч; 5 ч)

Контрольная работа № 4 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

VII. Обратные функции (0 ч; 0 ч; 6 ч)

Понятие обратной функции (0 ч; 0 ч; 1 ч)

Взаимно обратные функции (0 ч; 0 ч; 1 ч)

Обратные тригонометрические функции (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Примеры использования обратных тригонометрических функций (0 ч; 0 ч; 2 ч)

VIII. Числовые последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

IX. Предел последовательности (0 ч; 0 ч; 13 ч)

Определение бесконечно малой последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Свойства бесконечно малых последовательностей (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Бесконечно большие последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Определение предела последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Признак существования предела. Вычисление пределов рекуррентно заданных последовательностей (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Последовательности сумм, сумма бесконечно убывающей геометрического прогрессии (0 ч; 0 ч; 2 ч)

X. Производная (12 ч; 14 ч; 17 ч)

Приращение функции (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Понятие о производной (1 ч; 1 ч; 2 ч)

Понятие о непрерывности и предельном переходе (1 ч; 2 ч; 2 ч)

Правило вычисления производных (3 ч; 4 ч; 4 ч)

Производная сложной функции (1 ч; 1 ч; 3 ч)

Производные тригонометрических функций (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

XI. Применение непрерывности и производной (7 ч; 9 ч; 12 ч)

Применение непрерывности (2 ч; 3 ч; 3 ч)

Касательная к графику функции (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Приближенные вычисления (0 ч; 1 ч; 2 ч)

Производная в физике и технике (2 ч; 2 ч; 4 ч)

XII. Применение производной к исследованию функций (12 ч; 16 ч; 14 ч)

Признак возрастания (убывания) функции (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Критические точки функции, максимумы и минимумы (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Примеры применения производной к исследованию функции (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Наибольшее и наименьшее значения функции (2 ч; 4 ч; 4 ч)

Контрольная работа № 6 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

Итоговое повторение (7 ч; 9 ч; 10 ч)

Поурочные разработки

I полугодие

Глава I
Тригонометрические функции

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента

Уроки 1–2. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс (повторение)

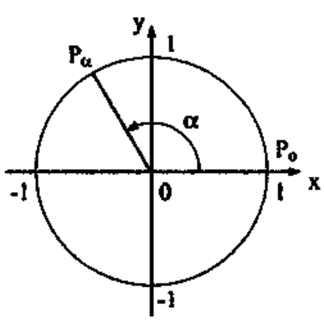
Цель: напомнить о радианной мере углов и основных тригонометрических функциях.

Ход урока

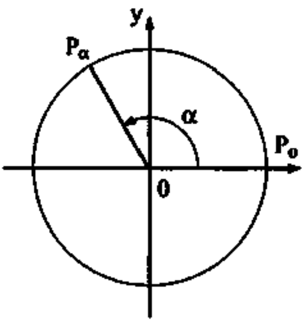
I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала 9 класса

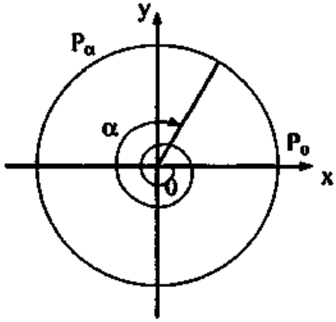
Обычно углы в геометрии рассматриваются при пересечении прямых, в многоугольниках (в частности, в треугольниках). При этом рассматриваемые углы составляют менее 360°. В физике (для колебательных, волновых и других процессов) приходится учитывать углы и больше 360°. Поэтому возникает **понятие обобщенного угла.**



Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат, которую называют **единичной окружностью**. Возьмем точку $P_0\,(1; 0)$. Сместим эту точку по окружности, получим точку P_α. При этом смещение может происходить и по часовой стрелке, и против часовой стрелки на любую величину (как меньше одного оборота, так и больше одного оборота). Будем считать $\angle P_0OP_\alpha$ **обобщенным углом (или просто углом)** α. Углы, полученные поворотом точки P_0 против часовой стрелки, считаются **положительными**, по часовой стрелке – **отрицательными**. Принято указывать направление поворота стрелкой и в случае более одного оборота – число оборотов. Например, на рисунке показаны положительный (а) и отрицательный (б) углы.



а) $\angle\alpha = 135° = \dfrac{3\pi}{4}$;



б) $\angle\alpha = -675° = -\dfrac{15\pi}{4}$.

В тригонометрии величины углов, как правило, измеряются **в радианах** и значительно реже в градусах. При этом за угол в 1 радиан (1 рад; слово «рад» обычно не пишут) принимают **центральный угол**, опирающийся **на** дугу окружности длиной, **равной радиусу** окружности; за угол в 1 градус (1°) – **центральный угол**, опирающийся **на дугу** окружности длиной, **равной** $\dfrac{1}{360}$ **длины окружности**. Поэтому между радианной и градусной мерой существует простое соотношение: $2\pi = 360°$ или $\pi = 180°$. Тогда $1\ (\text{рад}) = \left(\dfrac{360}{2\pi}\right)^{\circ} =$

$$= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx \left(\frac{180}{3{,}14}\right)^{\circ} \approx 57° \text{ и } 1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3{,}14}{180°} \approx 0{,}017 \ (\text{рад}).$$

Пример 1

Записать в других единицах измерения углы:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, б) $\alpha = -\frac{7\pi}{3}$, в) $\alpha = 210°$, г) $\alpha = -405°$.

Учтем, что 1 (рад) $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$. Тогда получаем:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 150°$;

б) $\alpha = -\frac{7\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = -420°$.

Учтем, что $1° = \frac{\pi}{180}$ (рад). Тогда имеем:

в) $\alpha = 210° = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ (рад);

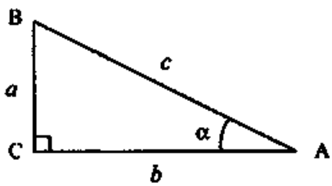
г) $\alpha = -405° = -405 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{9\pi}{4}$ (рад).

В частности на последнем рисунке приведены углы:

а) $\alpha = 135° = \frac{3\pi}{4}$, б) $\alpha = -675° = -\frac{15\pi}{4}$.

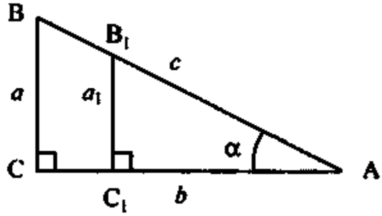
Заметим, что использование **радианной меры** углов обусловлено, в частности, более простой записью ряда формул. Для окружности радиуса R длина l ее дуги в α радиан вычисляется по формуле $l = \alpha R$. Если дуга содержит $n°$, то аналогичная формула имеет вид $l = \frac{\pi R n}{180}$. Также площадь S сектора круга радиуса R, дуга которого содержит α радиан, вычисляется по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2}$. Если дуга содержит $n°$, то аналогичная формула имеет вид $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

Теперь напомним определения основных тригонометрических функций, введенные в курсе геометрии.



Рассмотрим **прямоугольный треугольник** ABC с катетами a и b и гипотенузой c, с острым углом α. Тогда: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе); $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе); $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему катету); $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему катету).

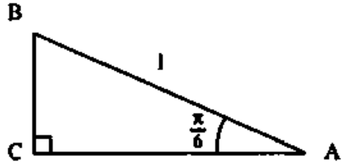
Для данного угла α отношения $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ **не зависят** от величин a, b и c.



Действительно, рассмотрим два подобных прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1 с общим острым углом α, катетами $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$ и гипотенузами $AB = c$, $AB_1 = c_1$. По определению синуса из этих треугольников имеем: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ и $\sin\alpha = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{a_1}{c_1}$. Но с другой стороны из подобия треугольников получаем $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$ или $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$. Поэтому отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{a_1}{c_1}$ не зависят от величин a, c, a_1, c_1 и **зависят** только от **величины угла** α. Следовательно, $\sin\alpha$ (как и остальные значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) являются **функциями угла** α.

Пример 2

Найдем значения тригонометрических функций угла $\frac{\pi}{6}$.



Так как тригонометрические функции угла не зависят от сторон треугольника, то рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 1$ и острым углом $\angle A = \frac{\pi}{6} = 30°$. В таком треугольнике $BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$. Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь легко найти все тригонометрические функции: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$.

Для любого угла приближенные **значения** основных тригонометрических **функций** находятся **с помощью калькулятора или таблиц. Для некоторых углов** можно найти и **точные значения** тригонометрических **функций**, аналогично примеру 2. Эти значения приведены в таблице. Символ «–» в таблице означает, что данная функция при этом значении аргумента не определена (не существует).

Аргумент α	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0° = 0$	0	1	0	–
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

Заметим, что достаточно помнить только **первые три строки** этой таблицы. Используя **свойства тригонометрических функций** и **формулы приведения** (см. следующие уроки), можно **находить значения тригонометрических функций и для других углов, свя**занных с углами 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3

Вычислить, используя приведенную таблицу:

а) $\mathrm{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 30° =$

$$= 1^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

б) $$\frac{3\sin\frac{\pi}{6} - 2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}}{5\mathrm{tg}0 - 6\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 + \frac{1}{2}}{5\cdot 0 - 6\cdot 1} = \frac{0}{-6} = 0.$$

в) $$1 + \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^3\frac{\pi}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(учтено, что слагаемые образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

Пример 4

Известно, что $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$.

Найти $A = \dfrac{3\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$.

Найдем связь между $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, используя условие задачи: $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$ или $\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin\alpha - 4\cos\alpha$ или $5\cos\alpha = \sin\alpha$.

Подставим $\sin\alpha$ в выражение A:

$$A = \frac{3(5\cos\alpha)^2 - (5\cos\alpha)\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(5\cos\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha} = \frac{75\cos^2\alpha - 5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{25\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{71\cos^2\alpha}{27\cos^2\alpha} = \frac{71}{27}.$$

Заметим, что полученный ответ справедлив при $\cos\alpha \neq 0$. Однако $\cos\alpha$ не может равняться нулю, так как это противоречит условию задачи. Действительно, если $\cos\alpha = 0$, то выражение $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$ имеет вид $\dfrac{\sin\alpha + 0}{\sin\alpha - 2\cdot 0} = 2$ или $1 = 2$. Так как это неравенство неверное, то $\cos\alpha \neq 0$.

III. Задание на уроке

№ 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, б); 18 (а, б); 19 (а); 20 (б).

IV. Контрольные вопросы

1. Как строится угол на единичной окружности?
2. Дайте определение 1 радиана и 1°.
3. Какая связь между радианной и градусной мерами угла?
4. Дайте определение основных тригонометрических функций.

V. Задание на дом

№ 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (в, г); 18 (в, г); 19 (б); 20 (а).

VI. Творческие задания

1. Вычислите:

а) $1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \ldots$; б) $1 + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} + \ldots$;

в) $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^4\dfrac{\pi}{6} + \sin^6\dfrac{\pi}{6} + \ldots$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^5\dfrac{\pi}{3} + \ldots$.

Ответы: а) 2; б) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{7}{8}$.

Найти $\dfrac{3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}$.

3. Известно, что $\dfrac{\sin\alpha + 5\cos\alpha}{2\sin\alpha + 3\cos\alpha} = \dfrac{11}{8}$.

Найти $\dfrac{2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha}$.

Ответы: 2) $\dfrac{22}{27}$; 3) $\dfrac{20}{17}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 3–4. Основные формулы тригонометрии (повторение)

Цель: вспомнить основные формулы тригонометрии, особенности их вывода и использования.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение функции синус.
2. Дайте определение 1 радиана.
3. Запишите в других единицах измерения углы:

а) $225°$; б) $-315°$; в) $\frac{6\pi}{5}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$.

4. Найдите $\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Вариант 2

1. Дайте определение функции косинус.
2. Дайте определение 1 градуса.
3. Запишите в других единицах измерения углы:

а) $165°$; б) $-225°$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

III. Повторение материала 9 класса

Основной **особенностью и трудностью тригонометрии** является **значительное число формул**. Нередки случаи, при которых применение правильных формул не приводит к результату. Поэтому **не** достаточно **просто знать формулы**, необходимо научиться **их целесообразно и рационально использовать**. В связи с изложенным будем повторять **основные формулы** тригонометрии, **группируя их**. **Базовые формулы** (которые надо помнить) будем **нумеровать**, остальные формулы без труда выводятся.

Функции одного угла

Из определения тригонометрических функций сразу следуют **основные тригонометрические тождества.**

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (1)

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\text{ где } n\in Z\right)$ (2)

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha\neq\pi n,\text{ где } n\in Z)$ (3)

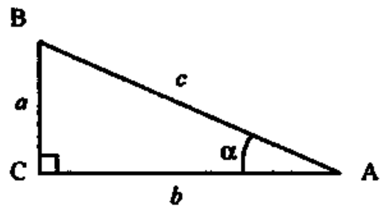
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}n,\text{ где } n\in Z\right)$

$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\text{ где } n\in Z\right)$

$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha\neq\pi n,\text{ где } n\in Z)$

Пример 1

Получим формулы (1), (2), четвертую и пятую.



Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. По определению имеем $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$ и $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$. Найдем выражение $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{c^2}=1$ (была использована теорема Пифагора $a^2+b^2=c^2$). Формула (1) получена.

По определению $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на c и получим $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Формула (2) доказана. Очевидно, что такая дробь существует, если $\cos\alpha \neq 0$, то есть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Аналогично выводится и формула (3).

Учитывая формулы (2) и (3), получим $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Формула существует, если $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$, то есть $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$. Четвертая формула доказана.

Учтем формулу (2) и получим $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ (была использована формула (1)). Формул имеет смысл при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Пятая формула получен Аналогично выводится и шестая формула.

Теперь рассмотрим **использование** приведенных формул. Прежд всего эти формулы позволяют **по значению одной функции** угла **найти все остальные.**

Пример 2

Известно, что $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Найдем другие функци угла α.

Используя формулу (1), получаем $\sin^2\alpha + \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1$, откуда $\sin^2\alpha = \frac{576}{625} = \left(\frac{24}{25}\right)^2$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ и в этой области $\sin\alpha < 0$, то решение уравнения $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$ и по формуле (3) получаем

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{-\dfrac{7}{25}}{-\dfrac{24}{25}}=\dfrac{7}{24}$. Итак имеем: $\sin\alpha=-\dfrac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{24}{7}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24}$.

Приведенные соотношения и формулы сокращенного умножения позволяют **доказывать простейшие тождества.**

Пример 3

Доказать, что $A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.

Используем формулу суммы кубов и соотношение (1). Получаем:

$$A=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot$$
$$\cdot(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+$$
$$+\cos^4\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2=1.$$

Тождество доказано.

Заметим, что в выражениях, содержащих **функции tg α и ctg α**, удобно (используя (2), (3)) **переходить к функциям sin α и cos α.**

Пример 4

Доказать тождество $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}$.

Используем в левой части тождества формулу (2), приведем дроби к общему знаменателю, разложим числитель дроби на множители и применим формулу (1). Получаем: $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1=$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1=\frac{\sin^3\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}=$$
$$=\frac{(\sin^3\alpha+\sin^2\alpha\cos\alpha)+(\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha)}{\cos^3\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos^3\alpha}=$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Тождество доказано.

Пример 5

Упростить выражение $A=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$.

В первой дроби заменим 1 по формуле (1), во второй дроби используем соотношение (2). Получаем: $A=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}+$

$$+\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+$$

$$+\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{0}{\sin\alpha+\cos\alpha}=0.$$

Итак, выражение $A=0$.

С использованием приведенных формул по известным комбинациям тригонометрических функций с учетом формул сокращенного умножения могут быть найдены их **неизвестные комбинации.**

Пример 6

Найти $|\sin\alpha+\cos\alpha|$, если $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|=C$.

Используем (2), (3) и получим $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=C$ или $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=C$ или $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=C$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{C}$. Тогда

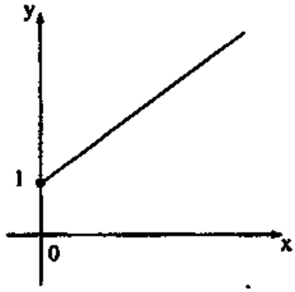
$$|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1+\frac{2}{C}}=\sqrt{\frac{C+2}{C}}.$$

Пример 7

Построить график зависимости $y(x)$, если $\sqrt{x}=\operatorname{tg}\alpha$ и $\sqrt{y}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ при допустимых значениях α.

Чтобы найти зависимость $y(x)$, необходимо исключить угол α. Найдем: $x=\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ge 0$ и $y=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}>0$. Видно, что α можно исключить, найдя разность $y-x=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$, откуда $y-x=1$ и $y=x+1$. Теперь остается построить график линейной функции $y=x+1$ (прямая линия) при условии $x\ge 0$ и $y>0$.



Формулы сложения (функции суммы и разности углов)

Обратите **особое внимание** на эту группу формул. На основе этих формул могут быть **получены все остальные формулы** тригонометрии. Напомним **формулы сложения.**

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (5)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (6)$

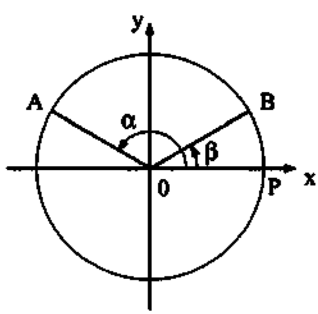
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (7)$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Пример 8

Получим формулу (4).



В единичной окружности радиус *OP* (равный 1) повернем на угол α и на угол β. Получим радиусы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Легко записать координаты векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $\overline{OA}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и $\overline{OB}(\cos\beta;\sin\beta)$. Найдем скалярное произведение этих векторов: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

С другой стороны, $\angle AOB = \alpha - \beta$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 1$. Поэтому скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ можно записать и по-другому $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right| \cos \angle AOB = \cos(\alpha - \beta)$.

Сравнивая два полученных выражения для скалярного произведения векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, сразу получаем $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Формулы (5)–(7) получаются из формулы (4) использованием формул приведения и четности функции $\cos\alpha$ и нечетности функции $\sin\alpha$.

Пример 9

Получим пятую формулу.

Учтем формулы (7) и (5). Имеем $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$. В полученной дроби разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cos\beta$. Тогда имеем

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак, получили $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Аналогично выводится и шестая формула.

Теперь рассмотрим применение формул этой группы.

Пример 10

Вычислим $\cos 15°$.

Учтем, что $15° = 45° - 30°$ и тогда $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966$.

Таким образом, приведенные формулы позволяют расширить значения тригонометрических функций, представленных ранее в таблице.

Пример 11

Найти $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = C$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Используем формулу (6) и получим $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$ $=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$. Найдем $\sin\alpha$. Используя формулу (1), получаем $\sin^2\alpha+C^2=1$, откуда $\sin\alpha=\sqrt{1-C^2}$ (учтено, что $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ и $\sin\alpha>0$). Тогда $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(C-\sqrt{1-C^2})$.

Пример 12

Доказать неравенство $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha,\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Выпишем очевидные неравенства $\cos\beta\sin\beta<\sin\alpha$ (так как $\cos\beta<1$) и $\cos\alpha\sin\beta<\sin\beta$ (так как $\cos\alpha<1$). Сложим два неравенства одного знака (при этом получившееся неравенство имеет тот же знак): $\cos\beta\sin\alpha+\cos\alpha\sin\beta<\sin\alpha+\sin\beta$ или по формуле (7) $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

Пример 13

Известно, что α, β, γ – углы треугольника. Доказать, что $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

Учитывая, что α, β, γ – углы треугольника, имеем $\alpha+\beta+\gamma=180°$, откуда $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$. Упростим выражение $\cos\gamma$: $\cos\gamma=$

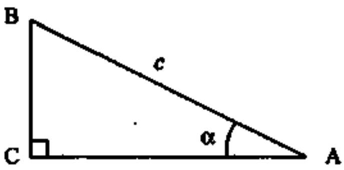
$=\cos(180°-(\alpha+\beta))=\cos180°\cos(\alpha+\beta)+\sin180°\sin(\alpha+\beta)=$

$=-\cos(\alpha+\beta)=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$.

Здесь учтено, что $\cos180°=-1$ и $\sin180°=0$ (что видно из единичной окружности). Тогда $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta+$ $+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta$. Таким образом, тождество доказано.

Пример 14

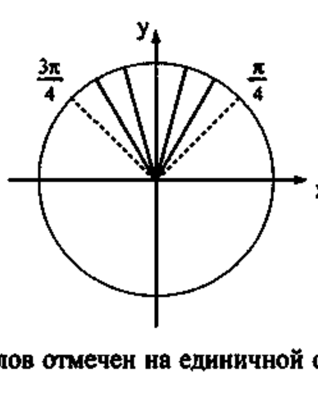
В каких пределах находится отношение суммы катетов к гипотенузе в прямоугольном треугольнике?



Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = c$ и один из острых углов $\angle A = \alpha$. Тогда через эти величины легко выразить катеты $AC = c\cdot\cos\alpha$ и $BC = c\cdot\sin\alpha$. Найдем отношение суммы катетов к гипотенузе $x = \dfrac{BC+AC}{AB} = \dfrac{c\cdot\sin\alpha + c\cdot\cos\alpha}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

Преобразуем выражение x, умножив и разделив его на $\sqrt{2}$. Получаем $x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}\right) =$ $= \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Здесь при преобразовании выражения x было учтено, что $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$.

Так как α – острый угол в треугольнике, то $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Прибавим ко всем частям этого неравенства $\dfrac{\pi}{4}$ и получим $\dfrac{\pi}{4} < \alpha + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$. Для удобства обозначим $z = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$. Тогда необходимо найти диапазон изменения величины $x = \sqrt{2}\sin z$ при $\dfrac{\pi}{4} < z < \dfrac{3\pi}{4}$.



Диапазон этих углов отмечен на единичной окружности штриховкой (пунктир показывает, что значения углов $z = \dfrac{\pi}{4}$ и $z = \dfrac{3\pi}{4}$ не достигаются). Понятно, что наименьшее значение x получается при $z = \dfrac{\pi}{4}$ и $z = \dfrac{3\pi}{4}$ и равно $x = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Наибольшее значение x достигается при $z=\frac{\pi}{2}$ и равно $x=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. Итак, отношение суммы катетов к гипотенузе меняется в пределах $1<x\le\sqrt{2}$.

IV. Задание на уроке

№ 4 (а, б); 5 (а, б); 6 (а, г); 7 (а, б); 8 (а, г); 9 (а, в); 11 (а); 22 (а, б); 23 (а, б).

V. Контрольные вопросы (рекомендуется параллельный опрос у доски нескольких учащихся)

1. Выпишите формулы для функций одного угла.
2. Выпишите формулы сложения.

VI. Задание на дом

№ 4 (б, г); 5 (в, г); 6 (б, в); 7 (в, г); 8 (б, в); 9 (б, г); 11 (в); 22 (в, г); 23 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 5–6. Формулы приведения. Формулы суммы и разности синусов и косинусов. Другие формулы тригонометрии (повторение)

Цель: закончить повторение основных формул тригонометрии, особенности их вывода и использования.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулы $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

2. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Вариант 2

1. Напишите формулы $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$.

2. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

III. Повторение материала 9 класса

Продолжим повторение **основных формул тригонометрии.**

Формулы приведения

Начнем со следующего примера.

Пример 1

Упростить выражение $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

Запишем данное выражение в виде $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=$

$=\dfrac{\cos\dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\dfrac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\dfrac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\dfrac{0\cdot\cos\alpha-(-1)\sin\alpha}{-1\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$. Были использованы формулы сложения (5), (7) и учтено, что $\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$ и $\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$.

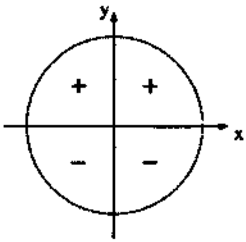
Видно, что удалось более сложную функцию $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ свести к более простой $(-\operatorname{tg}\alpha)$. Чтобы каждый раз не выполнять подобные действия, полезно знать **формулы приведения**. По сути это не формулы, а определенный **алгоритм преобразований.**

При преобразовании тригонометрической функции $f\left(\dfrac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)$, где $n\in Z$, надо знать следующее.

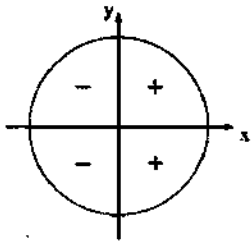
1. Если n – **четное число**, то преобразуемая **функция не меняется**. Если n – **нечетное число**, то преобразуемая **функция меняется на кофункцию (сопряженную функцию). Аргументом** преобразо-

ванной функции будет α. Заметим, что кофункциями являются пары функций: синус и косинус; тангенс и котангенс.

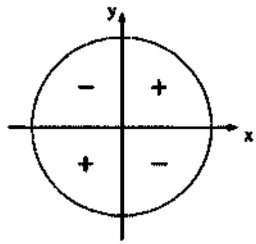
2. **Знак преобразованной функции совпадает со знаком исходной функции** при условии, что угол α острый, то есть $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (хотя реально он может быть любым). Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям представлены на рисунке.



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса

Еще раз вернемся к примеру 1. Так как функция котангенс имеет аргумент $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ и число $n = 3$ – нечетное, то функция котангенс меняется на кофункцию – тангенс. В предположении, что угол α острый, получаем, что угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ лежит в IV четверти. В этой четверти знак котангенса отрицательный. В I четверти (угол α острый) все тригонометрические функции положительны (в том числе и тангенс). Поэтому перед тангенсом необходимо поставить знак минус. В итоге имеем: $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Пользуясь этим алгоритмом (формулами приведения), рассмотрим еще ряд задач.

Пример 2

Упростим следующие выражения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$;

д) $\cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha$; е) $\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 3

Привести к тригонометрической функции угла из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ или (0°; 90°):

а) $\sin 1,6\pi = \sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + 0,1\pi\right) = -\cos 0,1\pi;$

б) $\cos 2,3\pi = \cos\left(\dfrac{4\pi}{2} + 0,3\pi\right) = \cos 0,3\pi;$

в) $\operatorname{tg} 278° = \operatorname{tg}(3\cdot 90° + 8°) = -\operatorname{ctg} 8°;$

г) $\cos 304° = \cos(3\cdot 90° + 34°) = \sin 34°.$

Пример 4

Упростить выражения:

а) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = (-\cos x)^2 + (-\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \dfrac{-\operatorname{tg}\alpha}{-\cos\alpha} \cdot \dfrac{-\cos\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha.$

Формулы двойного аргумента (угла)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (8)

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (9)

Пример 5

Выведем формулу (8).

В формуле $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ положим $\alpha = \beta$. Получаем $\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$ или $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Аналогично получается и формула (9).

Пример 6

Упростим выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha = 2\sin\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha;$

б) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha =$

$= \dfrac{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha = -\sin\alpha.$

Пример 7

Пусть $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдем $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Сначала найдем $\cos\alpha$. Получаем $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{144}{169}$ и $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ (учтено, что $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\cos\alpha < 0$). Теперь найдем требуемые величины: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$;

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = -\frac{120}{119}.$$

Заметим, что гораздо **реже** используются формулы **тройных углов**, которые также выводятся с помощью формул сложения:

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Из соотношений (8), (9) легко получить **формулы понижения степени**, которые очень **часто** используются при решении задач:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad (10)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (11)$$

Пример 8

Докажем формулу (11).

Преобразуем правую часть равенства: $\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2} = \cos^2\alpha$. Были учтены формулы (1) и (9). Аналогично доказывается и формула (10).

Пример 9

Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $A = 2\sin^2\alpha + 3\cos 2\alpha$.

Воспользуемся соотношением (10): $A = 2\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + 3\cos 2\alpha = 1 + 2\cos 2\alpha$.

Теперь проведем оценки: $-1 \le \cos 2\alpha \le 1$, тогда: $-2 \le 2\cos 2\alpha \le 2$ и $-2+1 \le 2\cos 2\alpha + 1 \le 2+1$, откуда $-1 \le 1 + 2\cos 2\alpha \le 3$. Итак, $-1 \le A \le 3$.

Преобразования суммы функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (12)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (13)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (14)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad (15)$$

Пример 10

Вывести формулу (14).

Представим углы α и β в виде: $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$, воспользуемся формулой (5) и получим: $\cos\alpha+\cos\beta=$

$$=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пример 11

Преобразовать в произведение $A=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Сгруппируем члены этого выражения и используем приведенные формулы: $A=(\sin\alpha+\sin\beta)-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma]=$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Пример 12

Упростить выражение $A=\dfrac{\sin3\alpha-\sin\alpha\cos2\alpha}{\sin3\alpha+\sin\alpha}$.

Воспользуемся формулами (7) и (12): $A=\dfrac{\sin(\alpha+2\alpha)-\sin\alpha\cos2\alpha}{2\sin2\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha-\sin\alpha\cos2\alpha}{2\sin2\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin2\alpha}{2\sin2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Наконец, остановимся на последней группе формул, которые часто используются при преобразованиях тригонометрических выражений и по непонятным причинам в школе **не рассматриваются.**

Преобразование произведения функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (16)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (17)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right] \qquad (18)$$

Пример 13

Вывести формулу (16).

Используя соотношение (5), запишем: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. Вычтем из первого выражение второе и получим: $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$, откуда $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$.

Пример 14

Вычислить $A = \sin 15^\circ\cos 7^\circ - \cos 11^\circ\cos 79^\circ - \sin 4^\circ\sin 86^\circ$.

Используя формулы (16)–(18), запишем $A = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 68^\circ + \cos 90^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 82^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ - \cos 68^\circ - \cos 82^\circ)$.
Здесь учтено, что $\cos 90^\circ = 0$. Рассмотрим: $\cos 68^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \cos 90^\circ\cos 22^\circ + \sin 90^\circ\sin 22^\circ = \sin 22^\circ$ (так как $\sin 90^\circ = 1$) и $\cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \cos 90^\circ\cos 8^\circ + \sin 90^\circ\sin 8^\circ = \sin 8^\circ$. Получаем: $A = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ - \sin 22^\circ - \sin 8^\circ) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$.

Пример 15

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $A = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{24}\right)$.

Используя (18), получим $A = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}-\alpha+\frac{\pi}{24}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}+\alpha-\frac{\pi}{24}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$. Оценим эту величину: $-1 \le \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le 1$, тогда $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le \frac{1}{2}$ (все части неравенства умножим на положительное число $\frac{1}{2}$) и $-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le \frac{3}{4}$ (ко всем частям прибавили $\frac{1}{4}$). Итак, $-\frac{1}{4} \le A \le \frac{3}{4}$, то есть наименьшее значение $\left(-\frac{1}{4}\right)$, наибольшее $\frac{3}{4}$.

IV. Задание на уроке

№ 12 (а); 13 (в); 14 (а, в); 15 (а, г); 21 (а, б).

V. Контрольные вопросы (рекомендуется параллельный опрос у доски нескольких учащихся)

1. Расскажите об алгоритме формул приведения.
2. Укажите знаки тригонометрических функций по координатным четвертям.
3. Выпишите формулы двойного аргумента.
4. Приведите формулы понижения степени.
5. Выпишите формулы преобразования суммы функций в произведение.
6. Приведите формулы преобразования произведения функций в сумму.

VI. Задание на дом

№ 12 (б); 13 (а, б); 14 (б, г); 15 (б, в); 21 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 7–8. Преобразования тригонометрических выражений

Цель: рассмотреть решение более сложных задач.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулы: $\sin\alpha+\sin\beta$; $\cos\alpha\cos\beta$; $\sin 2\alpha$.

2. Упростите выражение:

а) $\sin\alpha+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}$;

в) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$.

Вариант 2

1. Напишите формулы: $\cos\alpha+\cos\beta$; $\sin\alpha\sin\beta$; $\cos 2\alpha$.

2. Упростите выражение:

а) $\sin\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}$;

в) $\dfrac{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}$.

III. Решение задач повышенной сложности

В предыдущих уроках были рассмотрены основные тригонометрические формулы и их применения к решению задач. Как правило, задачи были не сложные. Рассмотрим более сложные примеры, которые встречались на выпускных экзаменах и ЕГЭ.

Пример 1

Вычислить $A=\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}85^\circ\cdot\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ$.

Используем формулы приведения: $\operatorname{tg}89^\circ=\operatorname{tg}(90^\circ-1^\circ)=\operatorname{ctg}1^\circ$, аналогично $\operatorname{tg}87^\circ=\operatorname{ctg}3^\circ$, $\operatorname{tg}85^\circ=\operatorname{ctg}5^\circ$ и т. д. Тогда имеем:

$A=(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{tg}87^\circ)\cdot(\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}85^\circ)\cdot\ldots\cdot(\operatorname{tg}43^\circ\cdot\operatorname{tg}47^\circ)\cdot\operatorname{tg}45^\circ=$
$=(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{ctg}3^\circ)\cdot(\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{ctg}5^\circ)\cdot\ldots\cdot(\operatorname{tg}43^\circ\cdot\operatorname{ctg}43^\circ)\cdot\operatorname{tg}45^\circ=$
$=1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot=1.$

Пример 2

Вычислить $A=32\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$.

Нужно догадаться умножить и разделить выражение A на $\sin\frac{\pi}{33}$.

Тогда получим $\dfrac{16}{\sin\dfrac{\pi}{33}}\left(2\sin\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{\pi}{33}\right)\left(\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33}\right)=$

$$=\frac{8}{\sin\frac{\pi}{33}}\left(2\sin\frac{2\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}\right)=$$

$$=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{33}}\left(2\sin\frac{4\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\right)\left(\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}\right)=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{33}}\left(2\sin\frac{8\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\right)\cdot\cos\frac{16\pi}{33}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{16\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{\sin\frac{32\pi}{33}}{\sin\frac{32\pi}{33}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{33}\right)}{\sin\frac{\pi}{33}}=\frac{\sin\frac{\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{33}}=1.$$

Пример 3

Найти $\sin 18°$.

Используя формулы приведения, преобразуем $\sin 36° = \sin(90° - 54°) = \cos 54°$ или $\sin 36° = \cos 54°$ или $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$ (где $\alpha = 18°$). Далее применим формулы кратных углов: $2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha \neq 0$, то получаем $2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = 4(1-\sin^2\alpha)-3 = 1-4\sin^2\alpha$ или $4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$. Введем новую переменную $x=\sin\alpha=\sin 18°$ и решим квадратное уравнение $4x^2+2x-1=0$. Его корни $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $x_2=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Учитывая, что $x > 0$, получаем $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Пример 4

Вычислить $A = \mathrm{tg}^2 36°\,\mathrm{tg}^2 72°$.

Вычтем и прибавим единицу к выражению A:

$$A = 1+(\mathrm{tg}^2 36°\cdot\mathrm{tg}^2 72°-1) = 1+\left(\frac{\sin^2 36°\sin^2 72°}{\cos^2 36°\cos^2 72°}-1\right)=$$

$$=1+\frac{\sin^2 36°\sin^2 72°-\cos^2 36°\cos^2 72°}{\cos^2 36°\cos^2 72°}=$$

$$=1+\frac{(\sin 36°\sin 72°-\cos 36°\cos 72°)(\sin 36°\sin 72°+\cos 36°\cos 72°)}{\cos^2 36°\cos^2 72°}=$$

$$=1+\frac{-\cos(36^\circ+72^\circ)\cos(72^\circ-36^\circ)}{\cos^2 36^\circ\cos^2 72^\circ}=1+\frac{-\cos 108^\circ\cos 36^\circ}{\cos^2 36^\circ\cos^2 72^\circ}=$$

$$=1+\frac{-\cos(108^\circ-72^\circ)}{\cos 36^\circ\cos^2 72^\circ}=1+\frac{\cos 72^\circ}{\cos 36^\circ\cos^2 72^\circ}=1+\frac{2\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ\cos 72^\circ 2\sin 36^\circ}=$$

$$=1+\frac{2\sin 36^\circ}{(2\sin 36^\circ\cos 36^\circ)\cos 72^\circ}=1+\frac{2\cdot 2\sin 36^\circ}{2\sin 72^\circ\cos 72^\circ}=1+\frac{4\sin 36^\circ}{\sin 144^\circ}=$$

$$=1+\frac{4\sin 36^\circ}{\sin(180^\circ-36^\circ)}=1+\frac{4\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ}=1+4=5.$$

Итак, $A=5$.

Пример 5

Упростим выражение $A=\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha}$.

Сгруппируем слагаемые в числителе и знаменателе дроби A: $A=\dfrac{(\sin 2\alpha+\sin 8\alpha)+(\sin 4\alpha+\sin 6\alpha)}{(\cos 2\alpha+\cos 8\alpha)+(\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)}$. Преобразуем суммы функций в скобках в произведения: $A=\dfrac{2\sin 5\alpha\cos 3\alpha+2\sin 5\alpha\cos\alpha}{2\cos 5\alpha\cos 3\alpha+2\cos 5\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\sin 5\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{2\cos 5\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin 5\alpha}{\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 5\alpha.$$ Поэтому $\mathrm{A}=\operatorname{tg} 5\alpha$.

Пример 6

Упростить выражение $A=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, если $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Начнем преобразования с внутреннего радикала и используем формулы понижения степени: $2+2\cos 4\alpha=2(1+\cos 4\alpha)=$ $=2\cdot 2\cos^2 2\alpha=4\cos^2 2\alpha$, тогда $\sqrt{2+2\cos 4\alpha}=\sqrt{4\cos^2 2\alpha}=|2\cos 2\alpha|=$

$$=\begin{cases}2\cos 2\alpha, \text{ если } \cos 2\alpha\ge 0\\ -2\cos 2\alpha, \text{ если } \cos 2\alpha<0\end{cases}=\begin{cases}2\cos 2\alpha, \text{ если } \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\\ -2\cos 2\alpha, \text{ если } \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

Теперь упростим $A=\sqrt{2+|2\cos 2\alpha|}=\begin{cases}\sqrt{2+2\cos 2\alpha}, \text{ если } \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\\ \sqrt{2-2\cos 2\alpha}, \text{ если } \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}=$

$$=\begin{cases}\sqrt{4\cos^2\alpha}, \text{ если } \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\\ \sqrt{4\sin^2\alpha}, \text{ если } \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}=\begin{cases}2\cos\alpha, \text{ если } \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\\ 2\sin\alpha, \text{ если } \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

В последнем случае знак модуля не ставится, так как $\cos\alpha\geq 0$ и $\sin\alpha\geq 0$.

Итак, $A=\begin{cases}2\cos\alpha, \text{ если } \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right];\\ 2\sin\alpha, \text{ если } \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

Пример 7

Доказать, что $4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\sin 3\alpha$, и вычислить $4\sin 10°\sin 50°\sin 70°$.

Обозначим доказываемое выражение A и запишем:
$A=4\sin\alpha(\sin 60°\cos\alpha-\cos 60°\sin\alpha)(\sin 60°\cos\alpha+\cos 60°\sin\alpha)=$

$$=4\sin\alpha\left[(\sin 60°\cos\alpha)^2-(\cos 60°\sin\alpha)^2\right]=$$

$$=4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2\right]=4\sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin\alpha\left[3(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha\right]=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=$$

$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin 3\alpha.$$

В доказанном тождестве положим $\alpha=10°$, тогда
$4\sin 10°\sin(60°-10°)\sin(60°+10°)=4\sin 10°\sin 50°\sin 70°=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$.

Пример 8

Упростить выражение $A=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{tg}16\alpha+$
$+32\operatorname{ctg}32\alpha$.

Проведем преобразования с конца этого выражения:
$16\operatorname{tg}16\alpha+32\operatorname{ctg}32\alpha=16\dfrac{\sin 16\alpha}{\cos 16\alpha}+32\dfrac{\cos 32\alpha}{\sin 32\alpha}=16\dfrac{\sin 16\alpha}{\cos 16\alpha}+$

$$+32\frac{\cos^2 16\alpha-\sin^2 16\alpha}{2\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=16\frac{\sin^2 16\alpha+\cos^2 16\alpha-\sin^2 16\alpha}{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=$$

$$=16\frac{\cos^2 16\alpha}{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=16\frac{\cos 16\alpha}{\sin 16\alpha}=16\operatorname{ctg}16\alpha.$$

Полностью аналогично продолжаем цепочку равенств: $8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{ctg}16\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$, $4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha$, $2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha=$ $=2\operatorname{ctg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

Итак, $A=\operatorname{ctg}\alpha$.

IV. Задание на уроке

№ 23 (а, в); 24 (б); 25 (а, б); 26 (а); 27 (а, г).

V. Задание на дом

№ 23 (б, г); 24 (а); 25 (в, г); 26 (б); 27 (б, в).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 9–10. Контрольная работа по теме «Преобразования тригонометрических выражений»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

Вариант 1

1. Вычислите: $4\sin\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{3}$.

2. Вычислите: $8\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-2\cos\frac{\pi}{4}$.

3. Известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\,\pi\right)$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

4. Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

5. Докажите тождество $\dfrac{\sin 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}=2\cos^2\alpha$.

6. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$.

Вариант 2

1. Вычислите: $2\sin\frac{\pi}{6}+5\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+6\cos\frac{\pi}{3}$.

2. Вычислите: $4\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)-6\sin\frac{\pi}{4}$.

3. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\,\frac{3}{2}\pi\right)$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

4. Упростите выражение $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)}{\cos^2(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

5. Докажите тождество $\dfrac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

6. Найдите наибольшее значение выражения $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

Вариант 3

1. Определите знак числа $\cos\frac{314\pi}{5}\sin\frac{385\pi}{8}$.

2. Дано: $3\sin\alpha-3\cos\alpha=1$. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$.

3. Найдите значения выражения $\dfrac{2\cos 13^\circ\cos 43^\circ-\cos 56^\circ}{2\sin 58^\circ\cos 13^\circ-\sin 71^\circ}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin(x-\pi)\cos(x+2\pi)\sin(4\pi-x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{ctg}(2\pi-x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$.

6. Докажите тождество $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

Вариант 4

1. Определите знак числа $\cos\dfrac{246\pi}{5}\sin\dfrac{405\pi}{8}$.

2. Дано: $4\sin\alpha+4\cos\alpha=1$. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$.

3. Найдите значения выражения $\dfrac{2\cos10^\circ\cos70^\circ-\cos80^\circ}{2\sin40^\circ\cos10^\circ-\sin50^\circ}$.

4. Упростите выражение $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin(\pi-x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}(x-\pi)}$.

6. Докажите тождество $1+\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Вариант 5

1. Вычислите $\dfrac{5}{6+7\sin2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{5}$.

2. Вычислите $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, если $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Сравните числа $\dfrac{\sin12^\circ+\sin10^\circ}{\sin12^\circ-\sin10^\circ}$ и $\dfrac{\operatorname{tg}11^\circ}{\operatorname{tg}1^\circ}$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ при $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha}{\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha}-\operatorname{tg}6\alpha+1$.

6. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$.

Вариант 6

1. Вычислите $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.

2. Вычислите $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

3. Сравните числа $\frac{\sin 32^\circ+\sin 22^\circ}{\sin 32^\circ-\sin 22^\circ}$ и $\frac{\operatorname{tg}27^\circ}{\operatorname{tg}5^\circ}$.

4. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

5. Упростите выражение $\frac{\sin 4\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 7\alpha+\cos 10\alpha}-\operatorname{tg}7\alpha-1$.

6. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ и $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Урок 11. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги \ № задачи	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
Ø	1				

Обозначения:
\+ − число решивших задачу правильно или почти правильно;
± − число решивших задачу со значительными ошибками;
− − число не решивших задачу;
Ø − число не решавших задачу. Вариант 1, 2 − 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.
3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).
4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 7.
2. *Ответ*: $\sqrt{2}$.
3. *Ответ*: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$.
4. *Ответ*: $\mathrm{ctg}\,\alpha$.
5. *Ответ*: доказано.
6. *Ответ*: 2.

Вариант 2

1. *Ответ*: 10.
2. *Ответ*: $-\sqrt{2}$.
3. *Ответ*: $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$.
4. *Ответ*: $\mathrm{tg}\alpha$.
5. *Ответ*: доказано.
6. *Ответ*: −2.

Вариант 3

1. *Ответ*: минус.
2. *Ответ*: $\frac{4}{9}$.

3. *Ответ*: $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

4. *Ответ*: $\cos^2\alpha$.

5. *Ответ*: $-\sin^2 x$.

6. *Ответ*: доказано.

Вариант 4

1. *Ответ*: минус.

2. *Ответ*: $-\dfrac{15}{32}$.

3. *Ответ*: 1.

4. *Ответ*: $-\sin^2\alpha$.

5. *Ответ*: $\operatorname{ctg}^2 x$.

6. *Ответ*: доказано.

Решения

Вариант 5

1. Используем основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного угла. Числитель и знаменатель дроби разделим на $\cos^2\alpha$. Получаем: $\dfrac{5}{6+7\sin 2\alpha}=\dfrac{5(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+14\sin\alpha\cos\alpha}=$ $=\dfrac{5\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha}{6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha+14\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{5\operatorname{tg}^2\alpha+5}{6\operatorname{tg}^2\alpha+6+14\operatorname{tg}\alpha}$. Подставим значение $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{5}$ и найдем $\dfrac{5\cdot\dfrac{1}{25}+5}{6\cdot\dfrac{1}{25}+6+14\cdot\dfrac{1}{5}}=\dfrac{130}{226}=\dfrac{65}{113}$.

Ответ: $\dfrac{65}{113}$.

2. Раскроем скобки в данном выражении $A=(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)=$ $=1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. Так как $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$, то найдем тангенс суммы двух углов: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ или $-1=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ или $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$. В этом равенстве перейдем к функции котан-

генс: $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}-1=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}$ или $1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$, откуда $1=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$. Тогда выражение $A=1+1=2$.

Ответ: 2.

3. Преобразуем первое число. Для этого в числителе и знаменателе дроби свернем сумму и разность синусов в произведение функций. Получаем: $\frac{\sin 12°+\sin 10°}{\sin 12°-\sin 10°}=\frac{2\sin 11°\cos 1°}{2\sin 1°\cos 11°}=\frac{\sin 11°}{\cos 11°}:\frac{\sin 1°}{\cos 1°}=\frac{\operatorname{tg} 11°}{\operatorname{tg} 1°}$.

Видно, что данные числа равны.

Ответ: числа равны.

4. Дробь $\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ имеет наибольшее значение, если ее знаменатель минимальный. Преобразуем его: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=$ $=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$ $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

Это выражение имеет минимальное значение, если $\sin^2 2\alpha$ достигает максимального значения. На промежутке $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ это имеет место при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Тогда знаменатель дроби равен $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ и сама дробь равна $\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$.

Ответ: 4.

5. В дроби преобразуем сумму функций в произведение, сократим дробь и упростим выражение: $\frac{\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha}-\operatorname{tg}6\alpha+1=$

$$=\frac{(\sin 5\alpha+\sin 7\alpha)+\sin 6\alpha}{(\cos 5\alpha+\cos 7\alpha)+\cos 6\alpha}-\operatorname{tg}6\alpha+1=\frac{2\sin 6\alpha\cos\alpha+\sin 6\alpha}{2\cos 6\alpha\cos\alpha+\cos 6\alpha}-\operatorname{tg}6\alpha+1=$$

$$=\frac{\sin 6\alpha(2\cos\alpha+1)}{\cos 6\alpha(2\cos\alpha+1)}-\operatorname{tg}6\alpha+1=\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}6\alpha+1=1.$$

Ответ: 1.

6. В подкоренных выражениях умножим числители и знаменатели дробей на сопряженную знаменателю величину. Получаем:

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

В силу ограниченности функции $\sin\alpha$ при всех α величины $1+\sin\alpha\ge 0$ и $1-\sin\alpha\ge 0$. Так как $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\cos\alpha<0$ и $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$. Поэтому выражение $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-2\operatorname{tg}\alpha$. Для значения $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$ найдем значение данного выражения $-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Вариант 6

1. Используем основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного угла. Числитель и знаменатель дроби разделим на $\cos^2\alpha$. Получаем: $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}=\frac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}=$ $=\frac{2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{7\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha+2}{7-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Подставим значение $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$ и найдем $\frac{2\cdot\frac{1}{25}+2}{7-\frac{1}{25}}=\frac{52}{174}=\frac{26}{87}$.

Ответ: $\frac{26}{87}$.

2. Раскроем скобки в данном выражении $A=(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=$ $=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Так как $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, то найдем тангенс суммы двух углов: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ или $1=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ или $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=$

$=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, откуда $1=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$. Тогда выражение $A=1+$ $+1=2$.

Ответ: 2.

3. Преобразуем первое число. Для этого в числителе и знаменателе дроби свернем сумму и разность синусов в произведение функций. Получаем: $\dfrac{\sin 32^\circ+\sin 22^\circ}{\sin 32^\circ-\sin 22^\circ}=\dfrac{2\sin 27^\circ\cos 5^\circ}{2\sin 5^\circ\cos 27^\circ}=\dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}:\dfrac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}=\dfrac{\operatorname{tg}27^\circ}{\operatorname{tg}5^\circ}$.

Видно, что данные числа равны.

Ответ: числа равны.

4. Дробь $\dfrac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ имеет наибольшее значение, если ее знаменатель минимальный. Преобразуем его: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$ $=(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-$ $-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$. Это выражение имеет минимальное значение, если $\sin^2 2\alpha$ достигает максимального значения. На промежутке $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ это имеет место при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. Тогда знаменатель дроби равен $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ и сама дробь равна $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Ответ: 2.

5. В дроби преобразуем сумму функций в произведение, сократим дробь и упростим выражение. Имеем:

$$\frac{\sin 4\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 10\alpha}-\operatorname{tg}7\alpha-1=\frac{(\sin 4\alpha+\sin 10\alpha)+\sin 7\alpha}{(\cos 4\alpha+\cos 10\alpha)+\cos 7\alpha}-$$

$$-\operatorname{tg}7\alpha-1=\frac{2\sin 7\alpha\cos 3\alpha+\sin 7\alpha}{2\cos 7\alpha\cos 3\alpha+\cos 7\alpha}-\operatorname{tg}7\alpha-1=\frac{\sin 7\alpha(2\cos 3\alpha+1)}{\cos 7\alpha(2\cos 3\alpha+1)}-$$

$$-\operatorname{tg}7\alpha-1=\operatorname{tg}7\alpha-\operatorname{tg}7\alpha-1=-1.$$

Ответ: -1.

6. В подкоренных выражениях умножим числители и знаменатели дробей на сопряженную знаменателю величину. Получаем:

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

В силу ограниченности функции $\sin\alpha$ при всех α величины $1+\sin\alpha \geq 0$ и $1-\sin\alpha \geq 0$. Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\cos\alpha > 0$ и $|\cos\alpha| = \cos\alpha$. Поэтому выражение $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Для значения $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$ найдем значение данного выражения $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Ответ: -1.

Уроки 12–14. Функции синус и косинус, их простейшие свойства и графики

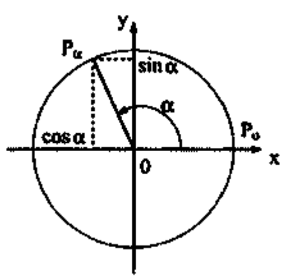
Цель: напомнить определение и простейшие свойства функции синус и косинус, графики этих функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение материала 9 класса

Известно, что значения тригонометрических функций не зависят от радиуса рассматриваемой окружности. Поэтому далее будет выбираться окружность единичного радиуса с центром в начале координат (единичная окружность). Пусть точка P_α (1; 0) единичной окружности получена при повороте точки P_0 (1; 0) на угол в α радиан. Тогда **ордината точки P_α – синус угла α, абсцисса точки P_α – косинус угла α.**



При нахождении величины y синуса угла в x радиан возникает числовая **функция** $y = \sin x$. При нахождении величины у косинуса угла в x радиан возникает числовая фукция $y = \cos x$.

Область определения этих функций – **множество всех действительных чисел** R, то есть $D(\sin x) = D(\cos x) = R$. **Область значений** этих функций – **отрезок** $[-1; 1]$, то есть $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$. Действительно, ординаты и абсциссы точек единичной окружности принимают все значения от -1 до 1.

Пример 1

Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 3\sin|x|$;

б) $y = -2\cos\sqrt{x^2 - 2x}$;

в) $y = 5\sin\dfrac{1}{x}$;

г) $y = -4\cos\dfrac{\pi x}{1+x^2}$.

а) Для данной функции x может принимать любые значения, поэтому $D(y) = R$. Теперь найдем область значений функции. Так как $-1 \le \sin|x| \le 1$, то умножим все члены этого неравенства на 3 и получим $-3 \le 3\sin|x| \le 3$ или $-3 \le y \le 3$, то есть $E(y) = [-3; 3]$.

б) Аргумент данной функции существует при условии $x^2 - 2x \ge 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, что и является областью определения функции $y(x)$. Итак, $D(y) = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. При изменении x в этих пределах величина $z = \sqrt{x^2 - 2x}$ меняется от 0 до ∞. Поэтому $-1 \le \cos z \le 1$, тогда $2 \ge -2\cos z \ge -2$, или $-2 \le -2\cos\sqrt{x^2 - 2x} \le 2$, или $-2 \le y \le 2$, то есть $E(y) = [-2; 2]$.

в) Аргумент этой функции существует при условии $x \ne 0$ и $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. При изменении x в таких пределах величина $z = \dfrac{1}{x}$ изменяется в промежутках $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Тогда $-1 \le \sin z \le 1$ или $-5 \le 5\sin z \le 5$, то есть $-5 \le 5\sin\dfrac{1}{z} \le 5$ или $-5 \le y \le 5$. Поэтому $E(y) = [-5; 5]$.

г) Промежуточный аргумент $z = \dfrac{\pi x}{1+x^2}$ этой функции определен при всех значениях x, поэтому $D(y) = R$. Найдем промежуток, в котором меняется z. Запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел 1 и x^2. Получаем

$\frac{1+x^2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot x^2}$ или $\frac{1+x^2}{2} \geq |x|$. Разделим обе части неравенства на положительное выражение $1 + x^2$ (при этом знак неравенства сохраняется) $\frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{1+x^2}$, откуда $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2}$, то есть $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$. При изменении z в указанных пределах, как видно из единичной окружности $0 \leq \cos z \leq 1$. Тогда $0 \geq -4\cos z \geq -4$ или $-4 \leq y \leq 0$. Поэтому $E(y) = [-4; 0]$.

Заметим, что во всех пунктах а)–г) рассматривались **сложные функции**. Для того чтобы **найти значение** тригонометрической **функции**, необходимо было **сначала найти значение промежуточного аргумента**. Этот аргумент в свою очередь являлся функцией аргумента x. В пункте а) промежуточным аргументом была функция $z = |x|$, в б) – $z = \sqrt{x^2 - 2x}$, в в) – $z = \frac{1}{x}$ и в г) – $z = \frac{\pi x}{1+x^2}$. Более подробное обсуждение сложной функции будет дано позднее.

Пример 2

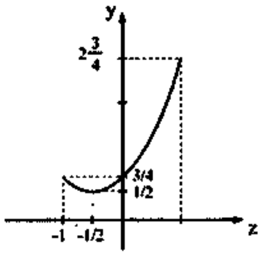
Найти область значений функции:

а) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 4$;

б) $y = \frac{7}{4} - \sin^2 x + \cos x$.

а) Используем формулу для синуса суммы двух углов. Первые два слагаемых в функции умножим и разделим на 2, учтем таблицу значений тригонометрических функций. Получаем: $y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + 4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) + 4 = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4$. При $x \in R$ величина $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется), а затем прибавим к ним число 4. Имеем: $-2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$ и $2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \leq 6$ или $2 \leq y \leq 6$. Поэтому $E(y) = [2; 6]$.

б) Используем основное тригонометрическое тождество и в данной функции перейдем к величине $\cos x$. Получаем: $y=\frac{7}{4}-$
$-(1-\cos^2 x)+\cos x=\cos^2 x+\cos x+\frac{3}{4}$. Введем вспомогательную величину $z=\cos x$, причем $-1\le z\le 1$. Тогда необходимо найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $y(z)=z^2+z+\frac{3}{4}$ на отрезке $[-1;\ 1]$.



Графиком этой функции является парабола, направленная ветвями вверх (см. рис.), вершина которой имеет координаты: $z_b=-\frac{1}{2}$ и $y_b=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$. В этой точке функция имеет наименьшее значение. Наибольшее значение функция имеет в точке $z=1$, и оно равно $y=2\frac{3}{4}$. Итак, получили $\frac{1}{2}\le y\le 2\frac{3}{4}$. Поэтому $E(y)=\left[\frac{1}{2};\ 2\frac{3}{4}\right]$.

Теперь напомним о свойстве **четности и нечетности** тригонометрических функций. Прежде всего, область определения любой тригонометрической функции – **симметричное множество**. Это означает, что если точка x_0 принадлежит такому множеству, то и симметричная точка $-x_0$ также принадлежит этому множеству. Понятие **четности или нечетности** функции вводится только **для функции, имеющей симметричную область определения.**

Если **для любого** x из симметричной области определения функции $y(x)$ выполнено **равенство:**

1) $y(-x)=-y(x)$ (то есть значения функции в симметричных точках противоположны по знаку), то такая функция называется **нечетной**. График этой функции симметричен относительно начала координат. Функция $y=\sin x$ является нечетной, то есть $\sin(-x)=-\sin x$.

2) $y(-x) = y(x)$ (то есть значения функции в симметричных точках равны), то такая функция называется **четной**. График этой функции симметричен относительно оси ординат. Функция $y = \cos x$ является четной, то есть $\cos(-x) = \cos x$.

Пример 3

Установите четность или нечетность функции:

а) $y(x) = 3\sin x \cos x$;

б) $y(x) = 2\sin|x| + 3\cos x$;

в) $y(x) = 3\sin x \cos^2 x + 1$;

г) $y(x) = \dfrac{\cos x}{x-2}$.

Для функций а)–в) область определения $D(y) = R$ – симметричное множество. Для этих функций найдем $y(-x)$.

а) $y(-x) = 3\sin(-x)\cos(-x) = 3(-\sin x)\cos x = -3\sin x \cos x = -y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то данная функция по определению нечетная.

б) $y(-x) = 2\sin|-x| + 3\cos(-x) = 2\sin|x| + 3\cos x = y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = y(x)$, то данная функция по определению четная.

в) $y(-x) = 3\sin(-x)\cos^2(-x) + 1 = 3(-\sin x)\cos^2 x + 1 = -3\sin x \cos^2 x + 1$. Видно, что равенство $y(-x) = -y(x)$ не выполняется, так как перед числом 1 один и тот же знак плюс. Равенство $y(-x) = y(x)$ также не выполняется, так как знаки перед первыми слагаемыми в этих функциях противоположны. Поэтому данная функция не является ни четной, ни нечетной, то есть определенной четности не имеет.

г) Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ не является симметричной, так как точка $x = -2$ входит в эту область, а симметричная точка $x = -(-2) = 2$ не входит. Поэтому данная функция определенной четности не имеет.

Напомним еще одно **свойство** тригонометрических функций – **периодичность** (более детальное обсуждение этого свойства будет приведено позднее), то есть **повторяемость** функции и ее графика. Для любого x выполняются равенства $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ и $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ (где n – произвольное целое число, то есть $n \in Z$). Это означает, что функции синус и косинус принимают одни и те же значения через 2π, 4π, 6π и т. д. **Наименьший положительный период** этих функций равен 2π.

Пример 4

Найти наименьший положительный период функции:

а) $y(x) = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$;

б) $y(x) = \cos 5x \cos 4x + \sin 5x \sin 4x$;

в) $y(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

г) $y(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} + 3$.

Преобразуем данные функции, используя тригонометрические формулы.

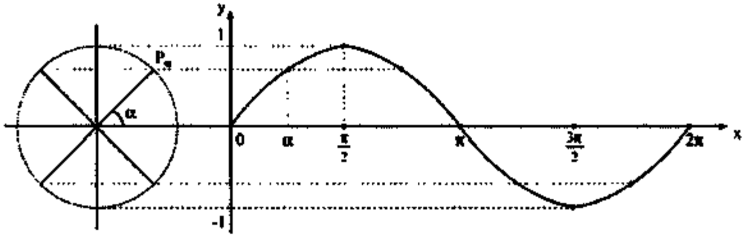
а) Используем формулу для синуса разности двух углов и получим: $y(x) = \sin(2x - x) = \sin x$. Наименьший положительный период этой функции $T = 2\pi$.

б) Используем формулу для косинуса разности двух углов и получим: $y(x) = \cos(5x - 4x) = \cos x$. Наименьший положительный период этой функции $T = 2\pi$.

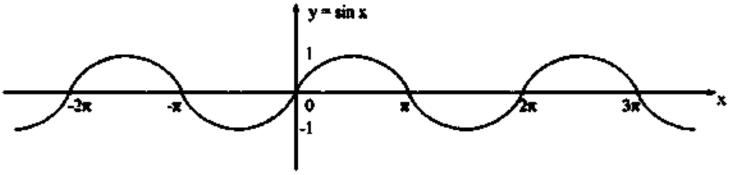
в) Используем формулу понижения степени и получим: $y(x) = \dfrac{1 - \cos x}{2}$. Наименьший положительный период функции $\cos x$ и данной функции $T = 2\pi$.

г) Используем формулу для косинуса двойного угла и получим $y(x) = \cos x + 3$. Наименьший положительный период функции $\cos x$ и данной функции $T = 2\pi$.

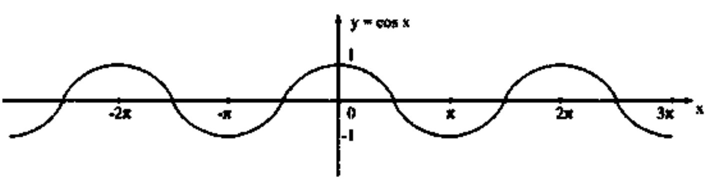
Обсудим теперь построение **графиков функций синус и косинус**. Сначала построим **график функции синус** на отрезке $[0; 2\pi]$. Отметим на оси ординат точки $(0; -1)$ и $(0; 1)$, на оси абсцисс точку $(2\pi; 0)$. Разделим отрезок $[0; 2\pi]$ и единичную окружность на 8 равных частей (учтите, что длина отрезка $[0; 2\pi]$ равна $2\pi \approx 6{,}28$). Каждая такая часть равна $\dfrac{\pi}{4}$. Для построения точки графика с абсциссой α используем определение синуса: отметим точку P_α на единичной окружности и проведем через P_α прямую, параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этой прямой и прямой $x = \alpha$ искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки P_α и по определению $\sin \alpha$ равен ординате точки P_α.



На рисунке приведено построение 8 точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке $[0; 2\pi]$. Для построения графика функции вне этого отрезка учтем **периодичность функции синус**, то есть $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ (где n – произвольное целое число). Поэтому во всех точках $x_o+2\pi n$ (где $0\le x_0\le 2\pi$) значения синуса совпадают. Следовательно, график синуса на всей прямой получается из построенного графика с помощью параллельных переносов его вдоль оси абсцисс (вправо и влево) на 2π, 4π, 6π и т. д. **График функции синус называется синусоидой.** Отрезок $[-1; 1]$ оси ординат, с помощью которого находили значения синуса, иногда называют **линией синусов.**



Для построения графика функции косинус учтем формулу приведения $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значение косинуса в любой точке x_0 равно значению синуса в точке $x_o+\frac{\pi}{2}$. Тогда график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому график функции $y=\cos x$ также является синусоидой.

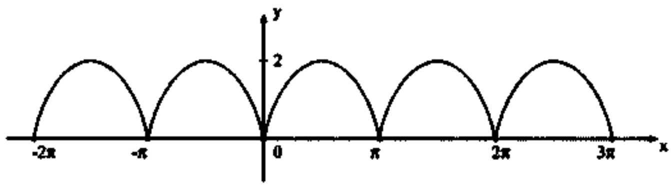


Используя приведенные графики, можно построить и графики более сложных функций, уравнений, неравенств.

Пример 5

Построим график функции $y=\sqrt{2-2\cos 2x}$.

Учтем формулу понижения степени и запишем данную функцию в виде $y=\sqrt{2-2\cos 2x}=\sqrt{2\cdot 2\sin^2 x}=2|\sin x|$. Теперь построим график $y=2|\sin x|$. Если $\sin x \geq 0$, то строим график функции $y=2\sin x$. Если $\sin x<0$, то строим график функции $y=-2\sin x$. Он получается отражением вверх относительно оси абсцисс частей графика $y=2\sin x$ при $\sin x<0$.

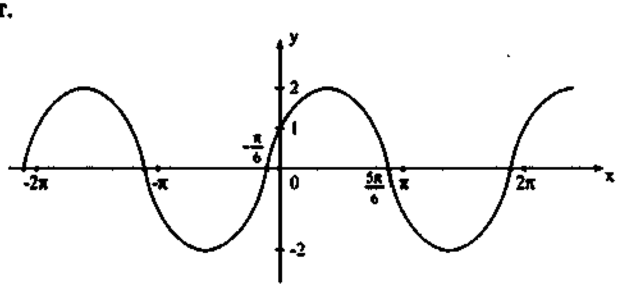


Пример 6

Построим график функции $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

Умножим и разделим данное выражение на число 2 и используем формулу для косинуса разности двух углов. Получаем:
$y=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

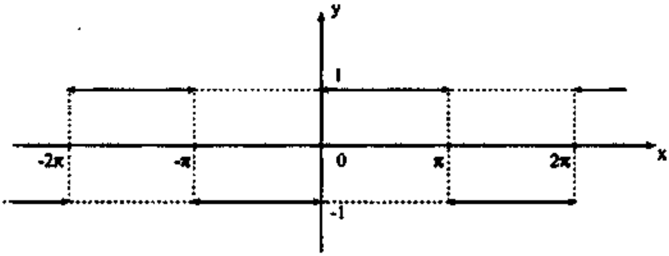
Такой график получается из графика функции $y=\cos x$ смещением на $\frac{\pi}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс и растяжением в 2 раза вдоль оси ординат.



Пример 7

Построим график функции $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}$.

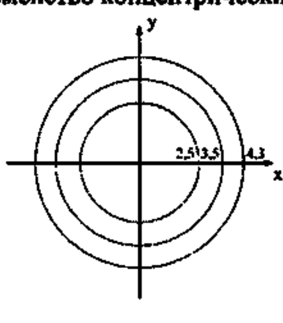
Раскроем знак модуля и получим $y=\begin{cases}1, \text{ если } \sin x>0\\ -1, \text{ если } \sin x<0\end{cases}$. При $\sin x=0$ (то есть $x=\pi n$, где n – любое целое число) данная функция не определена.



Пример 8

Построим график уравнения $\cos(x^2+y^2)=1$.

Так как выполнено равенство $\cos(x^2+y^2)=1$, то аргумент косинуса $x^2+y^2=2\pi n$, где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ При $n=0$ получаем уравнение $x^2+y^2=0$, которое имеет единственное решение $x=y=0$ (начало координат. При $n\in N$ получаем уравнение окружности $x^2+y^2=2\pi n$ с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2\pi n}$. Для различных натуральных n получаем семейство концентрических окружностей, радиусы которых $R\sim\sqrt{n}$, то есть $R_1=\sqrt{2\pi}\approx 2,5$; $R_2=\sqrt{4\pi}\approx 3,5$; $R_3=\sqrt{6\pi}\approx 4,3$ и т. д. Итак, графиком данного уравнения является начало координат и семейство концентрических окружностей.



III. Задание на уроке

№ 28 (б); 29 (г); 30 (б); 32 (а); 33 (а, б); 34 (в, г); 36 (а); 37 (б).

IV. Контрольные вопросы (рекомендуется параллельный опрос у доски нескольких учащихся)

1. Дайте определение функции синус.

2. Перечислите основные свойства функции синус.
3. Постройте график функции синус (с объяснением).
4. Дайте определение функции косинус.
5. Перечислите основные свойства функции косинус.
6. Постройте график функции косинус (с объяснением).

V. Задание на дом

№ 28 (в); 29 (в); 30 (а); 32 (г); 33 (в);, 34 (а, б); 36 (в); 37 (а); 38 (б, г).

VI. Творческие задания

Постройте график функции, уравнения или неравенства:

1) $y=\sin(-x)$;	2) $y=\cos(-x)$;
3) $y=\sin x+\sin(-x)$;	4) $y=\cos x+\cos(-x)$;
5) $y=\sqrt{1-\sin^2(-x)}$;	6) $y=\sqrt{1-\cos^2(-x)}$;
7) $y=\sin x+\cos x$;	8) $y=\sin x-\cos x$;
9) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$;	10) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$;
11) $y=\lvert\sin x\rvert$;	12) $y=\lvert\cos x\rvert$;
13) $y=\sin\lvert x\rvert$;	14) $y=\cos\lvert x\rvert$;
15) $\lvert y\rvert=\sin x$;	16) $\lvert y\rvert=\cos x$;
17) $y=2\lvert\sin x\rvert\cos x$;	18) $y=2\sin x\lvert\cos x\rvert$;
19) $y=\lvert\sin x\rvert\cos x+\sin x\lvert\cos x\rvert$;	20) $y=\sin x\lvert\cos x\rvert-\lvert\sin x\rvert\cos x$;
21) $\lvert x\rvert-3=\cos y$;	22) $\lvert x\rvert-2=\sin y$;
23) $\sin(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)=0$;	24) $\cos(\lvert x\rvert+2\lvert y\rvert)=-1$;
25) $\sin y=\sin x$;	26) $\cos y=\cos x$;
27) $y\geq\sin x$;	28) $y\leq\cos x$;
29) $\lvert y\rvert<\sin x$;	30) $\lvert y\rvert>\cos x$;
31) $y>\lvert\sin x\rvert$;	32) $y<\lvert\cos x\rvert$.

Указания: 1)–4) учесть свойство нечетности синуса и четности косинуса; 5)–6) использовать основное тригонометрическое тождество; 7)–10) свести функцию к одной тригонометрической функции; 11)–20) использовать определение и свойства модуля; 21)–22) считать переменную x функцией, переменную y – аргументом; 23)–24) решить соответствующее уравнение и найти более простую связь между переменными; 25)–26) перенести члены в одну часть, преобразовать разность функций в произведение и решить соответствующее уравнение; 27)–32) сначала построить график соответствующего уравнения.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 15–17. Функции тангенс и котангенс, их простейшие свойства и графики

Цель: напомнить определение и простейшие свойства функций тангенс и котангенс, графики этих функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Приведите основные свойства функции $y = \sin x$ и постройте ее график.

2. Найдите области определения и значений, период и четность функции $y = 2 + 3\sin^2 \dfrac{x}{2}$.

3. Постройте график функции $y = \cos x + \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

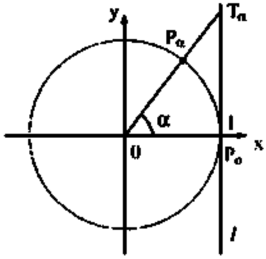
Вариант 2

1. Приведите основные свойства функции $y = \cos x$ и постройте ее график.

2. Найдите области определения и значений, период и четность функции $y = 3 + 5\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

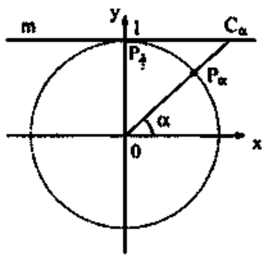
3. Постройте график функции $y = \sin x + \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

III. Повторение материала 9 класса



Проведем касательную l с уравнением $x = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_α этой окружности и проведем прямую OP_α

до пересечения с прямой l в точке T_α. Найдем ординату точки T_α. Прямая OP_α проходит через точки O (0; 0) и P_α ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$). Поэтому такая прямая имеет уравнение $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Абсцисса точки T_α равна 1, тогда ее ордината равна $\operatorname{tg}\alpha$. Итак, **ордината точки пересечения прямых OP_α и l равна тангенсу α**, поэтому прямую l называют **линией тангенсов**. При этом $\operatorname{tg}\alpha$ имеет смысл для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (где $n \in Z$), то есть в случае пересечения прямых OP_α и l.



Аналогичным образом определяют и котангенс. Проведем касательную m с уравнением $y = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_α этой окружности и проведем прямую OP_α до пересечения с прямой m в точке C_α. Можно показать, что **абсцисса точки пересечения прямых OP_α и m равна котангенсу α**. Поэтому прямую m называют **линией котангенсов**. При этом $\operatorname{ctg}\alpha$ имеет смысл для $\alpha \neq \pi n$ (где $n \in Z$), то есть в случае пересечения прямых OP_α и m.

Числовые функции, заданные формулами $y = \operatorname{tg}x$ и $y = \operatorname{ctg}x$, называют тангенсом и котангенсом. В соответствии с определением этих функций **область определения функции $y = \operatorname{tg}x$ – все x, кроме** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (то есть $D(\operatorname{tg}) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in Z$); **функции $y = \operatorname{ctg}x$ – все x, кроме** $x = \pi n$ (то есть $D(\operatorname{ctg}) = (\pi n;\ \pi + \pi n)$, где $n \in Z$).

Область значений этих функций – множество всех действительных чисел R, то есть $E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = R$.

Пример 1

Найдем область определения функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}x\right)$.

Учитывая область определения функции тангенс, получаем, что промежуточный аргумент удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{\pi}{8}x < \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Умножим все члены этого неравенства на положительное число $\frac{8}{\pi}$

(при этом знак неравенства сохраняется). Получаем: $-4 + 8n < x < 4 + 8n$. Итак, область определения данной функции $D(y) = (-4 + 8n;\ 4 + 8n)$, где $n \in Z$.

Пример 2

Найдем область значений функции:

а) $y = 2\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 5$; б) $y = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

а) Для данной функции введем новую переменную $t = \operatorname{ctg} x$, которая принимает все значения, то есть $t \in R$. Теперь нужно найти область значений квадратичной функции $y = 2t^2 - 4t + 5$. График этой функции – парабола, направленная ветвями вверх. При $t = 1$ функция имеет минимальное значение, равное $y_{\min} = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 5 = 3$. Поэтому область значений данной функции $E(y) = [3; \infty)$.

б) Для этой функции введем новую переменную $t = \operatorname{tg} x$, которая принимает все значения, то есть $t \in R$. Теперь нужно найти область значений функции $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел t^2 и 1. Имеем $\dfrac{t^2+1}{2} \geq \sqrt{t^2\cdot 1} = |t|$. Умножим обе части этого неравенства на положительное выражение $\dfrac{2}{t^2+1}$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $1 \geq \dfrac{2|t|}{1+t^2}$ или $-1 \leq \dfrac{2t}{1+t^2} \leq 1$ или $-1 \leq y \leq 1$. Поэтому область значений функции $E(y) = [-1; 1]$.

Напомним, что функции тангенс и котангенс являются нечетными, то есть $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

Пример 3

Установить четность или нечетность функции:

а) $y(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg}^3 x + 3\sin^5 x$; б) $y(x) = 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^4 x + \cos x$;

в) $y(x) = 3\operatorname{tg}^3 x - 4\cos x$; г) $y(x) = \dfrac{3\cos x}{\operatorname{tg}^3 x + 1}$.

Легко проверить, что для функций а)–в) область определения является симметричным множеством. Исследуем эти функции на четность или нечетность. Для этого найдем $y(-x)$ и сравним значения $y(x)$ и $y(-x)$.

а) Получаем: $y(-x) = \operatorname{tg}(-x) + 2\operatorname{ctg}^3(-x) + 3\sin^5(-x) =$

$= -\operatorname{tg} x + 2(-\operatorname{ctg} x)^3 + 3(-\sin x)^5 = -\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg}^3 x - 3\sin^5 x =$

$= -(\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg}^3 x + 3\sin^5 x) = -y(x)$.

Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ по определению нечетная.

б) Имеем: $y(-x) = 3\operatorname{tg}^2(-x) - \operatorname{ctg}^4(-x) + \cos(-x) = 3(-\operatorname{tg} x)^2 - (-\operatorname{ctg} x)^4 + {} + \cos x = 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^4 x + \cos x = y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = y(x)$, то функция $y(x)$ по определению четная.

в) Получаем $y(-x) = 3\operatorname{tg}^3(-x) - 4\cos(-x) = 3(-\operatorname{tg} x)^3 - 4\cos x = -3\operatorname{tg}^3 x - 4\cos x$. Для данной функции равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется, так как в величинах $y(x)$ и $y(-x)$ первые слагаемые отличаются знаками. Поэтому данная функция не является четной. Найдем $-y(x) = {} = -3\operatorname{tg}^3 x + 4\cos x$. Сравнивая величины $y(-x)$ и $-y(x)$, видим, что равенство $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется, так как величины отличаются знаками вторых слагаемых. Поэтому данная функция не является нечетной. Следовательно, функция $y(x)$ определенной четности не имеет.

г) Область определения данной функции – не симметричное множество. Например, функция определена в точке $x = \frac{\pi}{4}$ и не определена в симметричной точке $x = -\frac{\pi}{4}$. Поэтому данная функция определенной четности не имеет.

Также напомним, что функции тангенс и котангенс являются **периодическими**. Наименьший положительный **период** этих функций **равен** π, то есть выполняются равенства $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$, где $n \in Z$.

Пример 4

Найдем период функции:

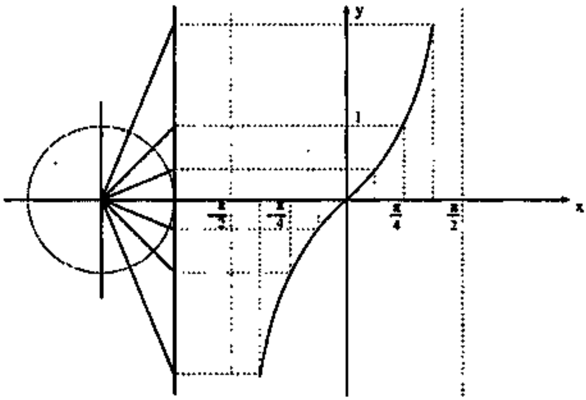
а) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{2x}{3}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{2x}{3}}$.

а) Представим функции тангенс и котангенс, используя функции синус и косинус. Получаем: $y = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = {}$

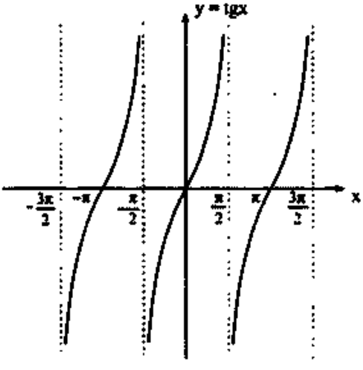
$= \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{2}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{2}{\sin x}$. Так как наименьший положительный период функции $\sin x$ равен 2π, то и данная функции $y(x)$ имеет такой же период.

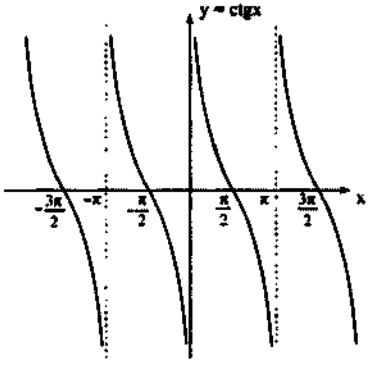
б) Используя формулу для тангенса суммы двух углов, сразу запишем функцию в виде $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{2x}{3}\right) = \mathrm{tg}\,x$. Наименьший положительный период этой функции равен π.

Остановимся теперь на **графиках** функций **тангенс и котангенс**. Сначала обсудим построение графика функции $y = \mathrm{tg}x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Такое построение аналогично построению графика функции $y = \sin x$, описанному ранее. При этом значение функции тангенс в точке находится с помощью линии тангенсов (см. рис.).



Учитывая периодичность функции тангенс, получаем ее график на всей области определения параллельными переносами вдоль абсцисс (вправо и влево) уже построенного графика на π, 2π и т. д. График функции тангенс называют тангенсоидой. Аналогичным образом или с помощью формулы приведения $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ строится график функции $y = \mathrm{ctg}x$.





С помощью базовых графиков функций $y = \text{tg}x$ и $y = \text{ctg}x$ могут быть построены графики более сложных функций, уравнений, неравенств.

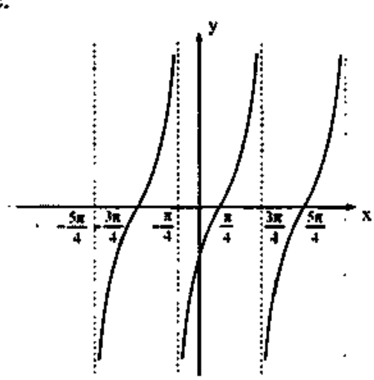
Пример 5

Построим график функции $y = \dfrac{\text{tg}\,x - 1}{\text{tg}\,x + 1}$.

Максимально упростим данную функцию. Перейдем к функциям синус и косинус: $y = \dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - 1}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + 1} = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. Умножим числитель и знаменатель этой дроби на $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и используем формулы для синуса и косинуса для разности двух углов. Получаем: $y = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x} =$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x}{\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x} = \frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

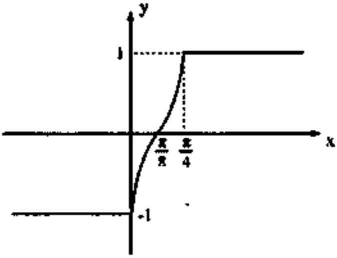
Итак, достаточно построить график функции $y = \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Такой график получается смещением графика функции $y = \text{tg}x$ на $\dfrac{\pi}{4}$ вправо вдоль оси абсцисс.



Пример 6

Построим график функции $y = \text{tg}\left(|x| - \left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|\right)$.

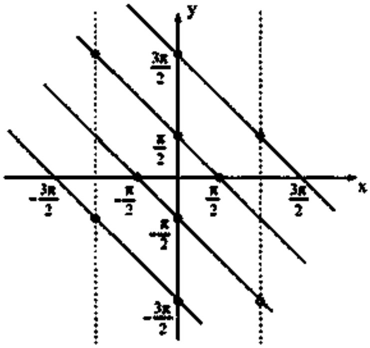
Используя определение и свойства модуля, в аргументе функции раскроем знаки модуля, рассмотрев три случая. Если $x < 0$, то имеем $y = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. При $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ получаем $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Для $x > \frac{\pi}{4}$ имеем $y = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Далее остается построить три части данного графика. При $x < 0$ строим прямую $y = -1$. Для $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ строим тангенсоиду $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Этот график получается смещением графика функции $y = \mathrm{tg}x$ на $\frac{\pi}{8}$ вправо вдоль оси абсцисс и сжатием в два раза вдоль этой оси. При $x > \frac{\pi}{4}$ строим прямую $y = 1$.



Пример 7

Построим график уравнения $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}y$.

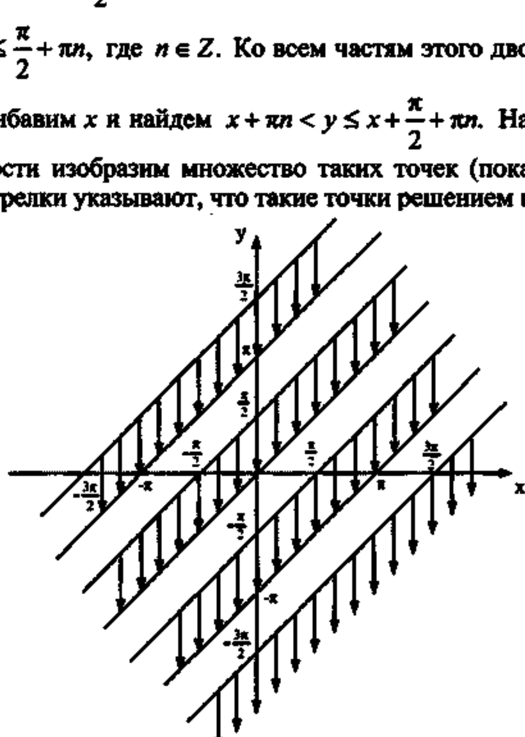
Из данного равенства найдем более простую связь между переменными x и y. Перейдем к функциям синус и косинус. Получаем: $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin y}{\cos y}$, или $\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y} = 0$, или $\frac{\cos(x+y)}{\sin x \cos y} = 0$. Отсюда следует, что $\cos(x+y) = 0$ и $\sin x \ne 0, \cos y \ne 0$. Из уравнения $\cos(x+y) = 0$ находим $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (где $n \in N$) и $y = \frac{\pi}{2} + \pi n - x$. Построим семейство этих прямых. Теперь учтем ограничение $\sin x \ne 0$, откуда $x \ne \pi m$ (где $m \in Z$). Удалим эти точки из построенных прямых (пустые точки). Рассмотрим второе ограничение $\cos y \ne 0$. Подставим в него величину $y = \frac{\pi}{2} + \pi n - x$ и получим: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - x\right) \ne 0$ или по формуле приведения $\sin x \ne 0$. Таким образом, второе ограничение свелось к первому (уже учтенному).



Пример 8

Построим множество точек, для которых выполнено неравенство $\operatorname{ctg}(y-x) \geq 0$.

Решим данное неравенство. Функция котангенс принимает неотрицательные значения для углов, расположенных в первой четверти, то есть $0 < y - x \leq \frac{\pi}{2}$. Учитывая периодичность функции, получаем $\pi n < y - x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим x и найдем $x + \pi n < y \leq x + \frac{\pi}{2} + \pi n$. На координатной плоскости изобразим множество таких точек (показаны штриховкой). Стрелки указывают, что такие точки решением не являются.



IV. Задание на уроке

№ 31 (а, б); 33; 47 (в).

V. Контрольные вопросы (рекомендуется параллельный опрос у доски нескольких учащихся)

1. Дайте определение функции тангенс.
2. Перечислите основные свойства функции тангенс.
3. Постройте график функции тангенс.
4. Дайте определение функции котангенс.
5. Перечислите основные свойства функции котангенс.
6. Постройте график функции котангенс.

VI. Задание на дом

№ 31 (в, г); 36 (б).

VII. Творческие задания

1. Определите четность или нечетность функции:

а) $y(x)=3\sin x+2\operatorname{tg}^3 4x+3x$; б) $y(x)=2\sin^3 x-4\operatorname{ctg}2x+x^5$;

в) $y(x)=2x^4+\cos 3x-\operatorname{tg}^2 x$; г) $y(x)=3x^2-\sin^4 x+7$;

д) $y(x)=3x+\cos 2x-\operatorname{ctg}^2 x$; е) $y(x)=x^3-\sin^2 2x+3\operatorname{tg}^4 x$;

ж) $y(x)=\dfrac{x^4+1}{\operatorname{tg}x-1}$; з) $y(x)=\dfrac{2x^3-1}{\operatorname{ctg}x+1}$.

Ответы: а), б) нечетная; в), г) четная; д)–з) определенной четности не имеет.

2. Постройте график функции, уравнения или неравенства:

а) $y=\operatorname{tg}(-x)$; б) $y=\operatorname{ctg}(-x)$; в) $y=\operatorname{tg}(x+\pi)$;

г) $y=\operatorname{ctg}(x-2\pi)$; д) $y\ge|\operatorname{tg}x|$; е) $y\le|\operatorname{ctg}x|$;

ж) $y=\operatorname{tg}|x|$; з) $y=\operatorname{ctg}|x|$; и) $|y|\le\operatorname{tg}x$;

к) $|y|\le\operatorname{ctg}x$; л) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y$; м) $\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}x$;

н) $\operatorname{tg}x=1$; о) $\operatorname{ctg}y=-1$; п) $\operatorname{tg}(y-2x)=0$;

р) $\operatorname{ctg}\pi(x+y)=1$; с) $\operatorname{tg}\pi(|x|-y)=-\sqrt{3}$; т) $\operatorname{ctg}\pi(|x|+|y|)=-1$.

Указания: а), б) учесть нечетность функции; в), г) учесть периодичность функции; д)–к) использовать определение и свойства модуля; л), м) найти более простую связь между переменными; н)–т) решить уравнение, найти переменную или связь между переменными.

VIII. Подведение итогов урока

§ 2. Основные свойства функции

Уроки 18–19. Понятие функции, способы ее задания, график функции

Цель: обсудить определение функции; основные понятия, связанные с ней, способы задания функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление изученного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найти области определения и значений, период и четность функции $y = \operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 1$.

2. Постройте график уравнения $\operatorname{ctg}(x - y) = -\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Найти области определения и значений, период и четность функции $y = \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x - 3$.

2. Постройте график уравнения $\operatorname{tg}(x + y) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

III. Изучение нового материала

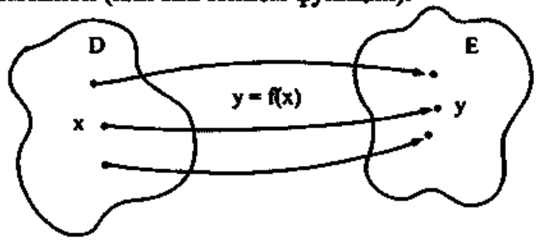
Эта тема является одной из важнейших для всего курса математики. Различные функции будут изучаться вплоть до окончания школы и далее в высших учебных заведениях. Пока учащиеся ознакомились с самыми простыми функциями – линейными, квадратичными, дробно-линейными и другими и их графиками. Будет дано первое представление о графиках уравнений и неравенств.

Данная тема вплотную связана с решением уравнений, неравенств, текстовыми задачами и т. д. Поэтому обратите самое серьезное внимание на ее изучение. Особое внимание следует уделить развитию навыков построения графиков функций, уравнений, неравенств.

1. Основные свойства функции.

Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f, по которому каждому числу $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in D$ (см. рис.). Тогда говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ или $y(x)$ **с областью определения** (*О. О.*) D **и областью изменения** (*О. И.*) E. При этом величину x называют **независи-**

симой переменной (или **аргументом** функции), величину y – **зависимой переменной** (или **значением** функции).



Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, (область значений функции f) обозначают $E(f)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-2} + 3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: от величины x вычесть число 2(x – 2), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$) и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). **Совокупность этих операций** (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и **называется функцией** $y(x)$. Например, для $x = 6$ находим $y(6) = \sqrt{6-2} + 3 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$. То есть для вычисления функции y в данной точке x **необходимо подставить эту величину x в данную функцию $y(x)$.**

Очевидно, что для данной функции **для любого** допустимого числа x можно найти только **одно** значение y (то есть каждому значению x соответствует **одно** значение y).

Рассмотрим теперь область определения и область изменения этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения (x – 2) можно только если эта величина неотрицательная, то есть $x - 2 \geq 0$ или $x \geq 2$. Поэтому находим $D(y) = [2; +\infty)$. Так как по определению арифметического корня $0 \leq \sqrt{x-2} < +\infty$, то прибавим ко всем частям этого неравенства число 3, получим $3 \leq \sqrt{x-2} + 3 < +\infty$ или $3 \leq y < +\infty$. Поэтому находим $E(x) = [3; +\infty)$.

В математике часто используются **рациональные функции**. При этом **функции вида** $f(x) = p(x)$ (где $p(x)$ – многочлен) называют **целыми рациональными функциями. Функции вида** $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ (где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены) называют **дробно-рациональными функциями**. Очевидно, дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ определена, если знаменатель

$q(x)$ не обращается в нуль. Поэтому область определения дробно-рациональной функции $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ – множество всех действительных чисел, из которого исключены корни многочлена $q(x)$.

Пример 2

Рациональная функция $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ определена при $x-2\neq 0$, то есть $x\neq 2$. Поэтому область определения данной функции – множество всех не равных 2 действительных чисел, то есть объединение интервалов $(-\infty; 2)$ и $(2; \infty)$.

Напомним, что **объединением** множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается символом $A\cup B$. Так, объединением отрезков $[1; 5]$ и $(3; 9)$ является промежуток $[1; 9)$. Объединение промежутков $[1; 2)$ и $[3; 4]$ (не пересекающиеся промежутки) обозначают $[1; 2)\cup[3; 4]$.

Возвращаясь к примеру, можно записать $D(f)=(-\infty; 2)\cup(2; \infty)$. Так как при всех допустимых значениях x дробь $\dfrac{1}{x-2}$ не обращается в нуль, то функция $f(x)$ принимает все значения, кроме 3. Поэтому $E(f)=(-\infty; 3)\cup(3; \infty)$.

Пример 3

Найдем область определения дробно-рациональной функции $F(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3x+4}{(x-1)(x+3)}$.

Знаменатели дробей обращаются в нуль при $x=2$, $x=1$ и $x=-3$. Поэтому область определения данной функции $D(f)=(-\infty; -3)\cup$ $\cup(-3; 1)\cup(1; 2)\cup(2; \infty)$.

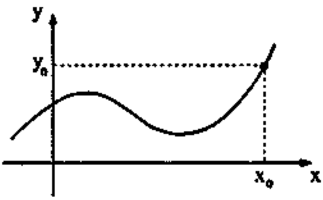
Пример 4

Зависимость $y(x)=\begin{cases}2x-3\\ x^2+1\end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например для $x=1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y=2\cdot 1-3=-1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y=1^2+1=2$. Таким образом, одному значению x ($x=1$) соответствуют два значения y ($y=-1$ и $y=2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

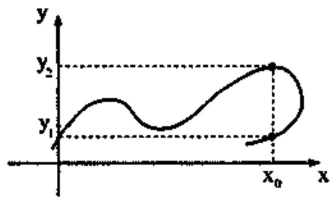
Пример 5

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определить, какая из них является функцией.

На рис. *а* приведен график функции, так как любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), так как существуют такие точки (например x_0), которым отвечает более одного значения y (например y_1 и y_2).



а)



б)

2. Рассмотрим теперь **основные способы задания** функций.

а) ***Аналитический*** (с помощью формулы или формул)

Пример 6

Рассмотрим функции:

а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$; б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0; \\ x^2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, $x = -0{,}37$. Так как $x < 0$, то пользуясь верхним выражением получаем $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \dfrac{2}{3}$ (так как $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x + y = 2y - x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x + x^2 = 2y - y$ или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y = x^2 + 3x$.

б) ***Табличный***

Пример 7

Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

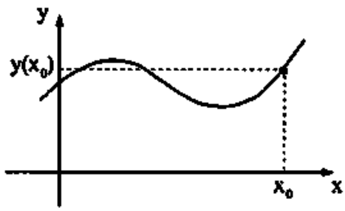
x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задает функцию: для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1{,}5) = 2{,}25$, $y(5) = 25$ и т. д.

в) ***Графический***

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться **специальным рисунком – графиком** функции.

3. Графиком функции $y(x)$ называют **множество** всех точек системы координат, **абсциссы** которых равны значениям **независимой переменной** x, а **ординаты** – соответствующим значениям **зависимой переменной** y.



В силу такого определения, все пары точек (x_0, y_0), которые **удовлетворяют** функциональной зависимости $y(x)$, **расположены** на графике функции. Любые другие пары точек, **не удовлетворяющие зависимости** $y(x)$ на графике функции **не лежат**.

Пример 8

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) $(-2; -6)$; б) $(-3; -10)$?

а) Найдем значение функции y при $x = -2$: $y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3|-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка A $(-2; -6)$ **принадлежит** графику данной функции.

б) Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot |-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка B $(-3; -10)$ **не принадлежит** графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. **Наиболее полным** следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем, **табличный** способ позволяет **быстро и легко найти значение функции** для некоторых значений аргумента. **График** функции **наглядно показывает ее поведение**. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и **свои недостатки**. На практике используются все три способа задания функции.

В дальнейшем будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим еще несколько задач.

Пример 9

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$. Найти: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x+1)$.

Для того, чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2 \cdot (-3x)^2 - 3 \cdot (-3x) + 1 = 18x^2 + 9x + 1$;

в) $y(x + 1) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3\,(x + 1) + 1 = 2\,(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 = 2x^2 + x$.

Пример 10

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найти: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставив это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим $y(3-(3-z)) = 2\cdot(3-z)^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(3-z)^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2x^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции: z, x, t или любой другой, то сразу получаем $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$.

б) Теперь легко найти $y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 8 + 24 + 14 = 46$.

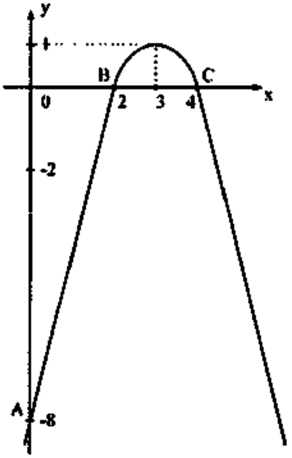
Остановимся теперь на **основных свойствах функции**. С двумя свойствами функции вы уже знакомы – это **область определения** и **область изменения** функции (см. пример 1). Рассмотрим **следующее свойство** функции – **точки пересечения** графика функции **с осями координат**.

Так как ось Oy характерна тем, что любая точка на ней имеет координату $x = 0$, а для оси Ox – любая точка на ней имеет координату $y = 0$, то точки пересечения графика с осями координат ищутся очень просто. **Точка пересечения с осью** Oy **равна значению функции** $y(x)$ **при** $x = 0$, то есть $y(0)$. **Точки пересечения с осью** Ox **является корнями уравнения** $y(x) = 0$.

Пример 11

Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$. Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат. Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки $A\,(0; -8)$.

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение $0 = -x^2 + 6x - 8$ или $0 = x^2 - 6x + 8$. Решим его: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$, то есть $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: B (2; 0) и C (4; 0). Для наглядности на рисунке приведен график данной функции.



IV. Задание на уроке

№ 40 (а, б); 41 (а, г); 42 (а, в); 43 (а, б); 44 (а, в); 45 (а, б); 46 (а, г); 47 (а); 51 (б).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение числовой функции.
2. Расскажите о способах задания функции.
3. Что называется объединением множеств A и B?
4. Какие функции называются целыми рациональными функциями?
5. Какие функции называются дробно-рациональными функциями? Как находится область определения таких функций?
6. Что называют графиком функции $f(x)$?
7. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?

VI. Задание на дом

№ 40 (в, г); 41 (б, в); 42 (б, г); 43 (в, г); 44 (б, г); 45 (в, г); 46 (б, в); 47 (б); 51 (а, в).

VII. Творческие задания

Найдите точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $y=3x-2$; 2) $y=2x+5$; 3) $y=\frac{4x-1}{2x+3}$;

4) $y=\frac{5x+2}{3x-1}$; 5) $y=(3x+2)(x-1)$; 6) $y=(2x-1)(x+2)$;

7) $y=5x^2-4x-1$; 8) $y=3x^2-2x-5$; 9) $y=\sin x-1$;

10) $y=\cos x+1$; 11) $y=2\cos x-3$; 12) $y=3\cos x+4$;

13) $y=\begin{cases}x^2-4, \text{ если } x\geq 1\\ 3x-6, \text{ если } x<1\end{cases}$; 14) $y=\begin{cases}1-x^2, \text{ если } x>0\\ x+1, \text{ если } x\leq 0\end{cases}$;

15) $y=\sqrt{3x+4}$; 16) $y=\sqrt{2x+1}$;

17) $y=\begin{cases}\sin x, \text{ если } x\leq 0\\ \cos x-1, \text{ если } x>0\end{cases}$; 18) $y=\begin{cases}\cos x, \text{ если } x<0\\ 1-\sin x, \text{ если } x\geq 0\end{cases}$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 20–22. Преобразование графиков

Цель: освоить основные способы преобразования графиков.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{7}{x+2}-\frac{6x+5}{x^2-6x+8}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5-x}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f)=[-3;4]$; $E(f)=[-2;3]$; $f(0)=2$.

Вариант 2

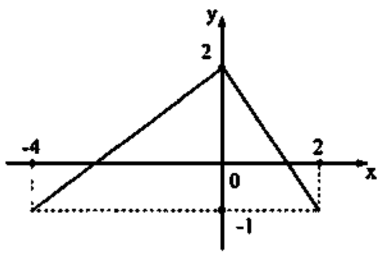
1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{3}{x+4}-\frac{5x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x+2}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f) = [-2; 5]$; $E(f) = [-3; 4]$; $f(0) = 3$.

III. Изучение нового материала

Способы преобразования графиков позволяют **строить графики достаточно сложных функций**, используя базовые графики линейной, квадратичной, тригонометрической (и позднее показательной и логарифмической) функций, обратно пропорциональной зависимости. Такие **способы** преобразования **являются универсальными** и пригодны **для любых функций**. Для простоты построения будем рассматривать кусочно-линейную функцию $f(x)$ с областью определения $D(f)$, график которой представлен на рисунке.



Будем обозначать через $(x'; y')$ координаты точки, в которую переходит произвольная точка $(x; y)$ плоскости при данном преобразовании. Рассмотрим эти преобразования.

1) **Параллельный перенос вдоль оси ординат на вектор (0; b)**

При данном преобразовании получаем $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$ и произвольная точка графика $(x; f(x))$ переходит в точку $(x; f(x) + b)$. Это означает, что график функции $f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x; f(x) + b)$, где $x \in D(f)$. По определению такая фигура является графиком функции $y = f(x) + b$. В соответствии с изложенным сформулируем **правило**:

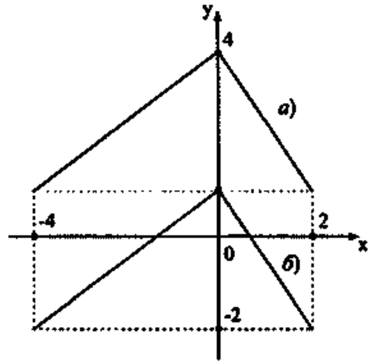
Для построения графика функции $y = f(x) + b$ (где b – постоянное число), надо перенести график функции $y = f(x)$ на вектор $(0; b)$ вдоль оси ординат.

Пример 1

Для представленной функции $y = f(x)$ построим графики функций:
а) $y = f(x) + 2$; б) $y = f(x) - 1$.

а) В соответствии с правилом переносим график функции $y = f(x)$ на вектор (0; 2), то есть на 2 единицы верх вдоль оси ординат.

б) В соответствии с правилом переносим график функции $y = f(x)$ на вектор (0; −1), то есть на 1 единицу вниз вдоль оси ординат.



2) **Растяжение вдоль оси ординат с коэффициентом k**

Такое преобразование задается формулами $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$, и произвольная точка графика $(x; f(x))$ переходит в точку $(x; kf(x))$. Это означает, что график функции $f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x; kf(x))$, где $x \in D(f)$. Такая фигура является графиком функции $y = kf(x)$. Итак, имеет место следующее **правило:**

Для построения графика функции $y = kf(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси ординат.

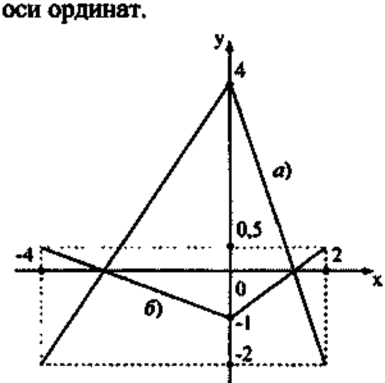
Пример 2

Построим графики функций:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -0{,}5f(x)$.

а) В соответствии с правилом растягиваем график функции $y = f(x)$ в 2 раза вдоль оси ординат.

б) В соответствии с правилом растягиваем график функции $y = f(x)$ в $-0{,}5$ раза вдоль оси ординат.



Отметим, что если $0 < |k| < 1$, то растяжение с коэффициентом k фактически является **сжатием**. Поэтому растяжение с коэффициентом 0,5 является сжатием в 2 раза. При $k < 0$ для построения графика функции $y = kf(x)$ надо сначала растянуть график функции $y = f(x)$ в $|k|$ раз, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс.

3) **Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор $(a; 0)$**

Это преобразование описывается формулами $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$. Каждая точка графика функции $f(x)$ переходит в точку $(x + a; f(x))$. Поэтому с помощью переменных x' и y' можно записать, что график f переходит в фигуру Φ, состоящую из точек $(x'; f(x' - a))$, где x' принимает все значения $x + a$. Именно при этих значениях x' число $x' - a$ принадлежит $D(f)$ и $f(x' - a)$ определено. Поэтому фигура Φ есть график функции $y = f(x - a)$. Итак, запомните **правило**:

График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $f(x)$ переносом вдоль оси абсцисс на вектор $(a; 0)$. При $a > 0$ вектор $(a; 0)$ направлен в положительном направлении оси абсцисс, при $a < 0$ – в отрицательном.

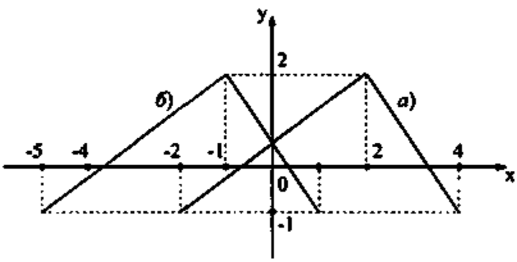
Пример 3

Построим графики функций:

а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x + 1)$.

а) Переносим график функции вдоль оси абсцисс на вектор (2; 0), то есть смещаем его на 2 единицы вправо.

б) Переносим график функции вдоль оси абсцисс на вектор (−1; 0), то есть смещаем его на 1 единицу влево.



4) **Растяжение вдоль оси абсцисс с коэффициентом k**

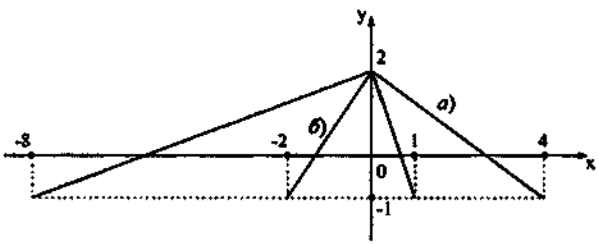
Такое преобразование задается формулами $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$. Произвольная точка графика функции $f(x)$ при этом переходит в точку $(kx; f(x))$. Для переменной x', y' можно утверждать, что график функции $y = f(x)$

переходит в фигуру, состоящую из точек (x; $f\left(\frac{x'}{k}\right)$), где x' принимает все значения kx, а $x \in D(f)$. Эта фигура есть график функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$. Таким образом, существует **правило**:

Для построения графика функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ надо растянуть график функции $f(x)$ с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Пример 4

Построим графики функций: а) $y = f(0{,}5x)$; б) $y = f(2x)$.



а) Запишем функцию в виде $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$. В соответствии с правилом для построения графика этой функции надо график функции $y = f(x)$ растянуть в 2 раза вдоль оси абсцисс.

б) Запишем функцию в виде $y = f\left(\frac{x}{0{,}5}\right)$. График этой функции получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в 0,5 раза. Так как $k = 0{,}5$ и $0 < |k| < 1$, то фактически это означает сжатие графика $y = f(x)$ в $\frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}5} = 2$ раза вдоль оси абсцисс.

Рассмотрим **частные случаи** преобразований 2 и 4, **наиболее распространенные** на практике.

5) Отражение относительно оси абсцисс

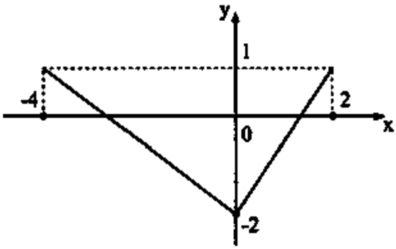
Это преобразование является частным случаем преобразования 2 для $k = -1$ и описывается формулами $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Тогда имеет место **правило**:

Для построения графика функции $y = -f(x)$ надо график функции $y = f(x)$ отразить относительно оси абсцисс.

Пример 5

Построим график функции $y = -f(x)$.

В соответствии с правилом отражаем симметрично относительно оси абсцисс график функции $y = f(x)$ и получаем график функции $y = -f(x)$.



6) Отражение относительно оси ординат

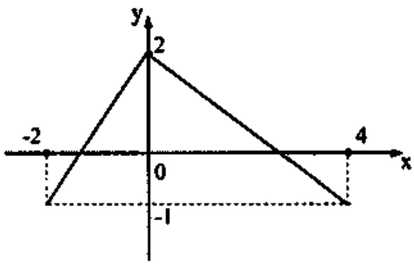
Такое преобразование является частным случаем преобразования 4 для $k = -1$ и задается формулами $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$. Существует **правило:**

Для построения графика функции $y = f(-x)$ надо график функции $y = f(x)$ симметрично отразить относительно оси ординат.

Пример 6

Построим график функции $y = f(-x)$.

Отразим график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси ординат и получим график функции $y = f(-x)$.

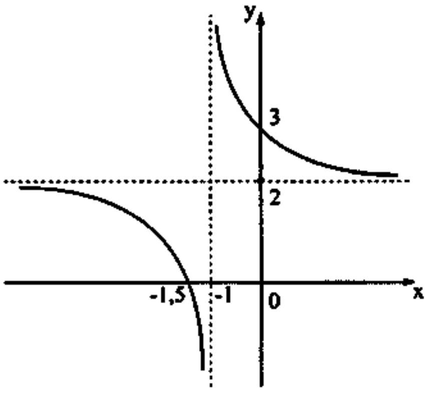


Обязательно надо **запомнить** шесть изложенных правил преобразования графиков. Еще раз напомним, что эти правила являются **универсальными** и **применимы для любых функций**. Остановимся теперь на использовании этих правил для построения графиков конкретных функций.

Пример 7

Построим график дробно-линейной функции $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

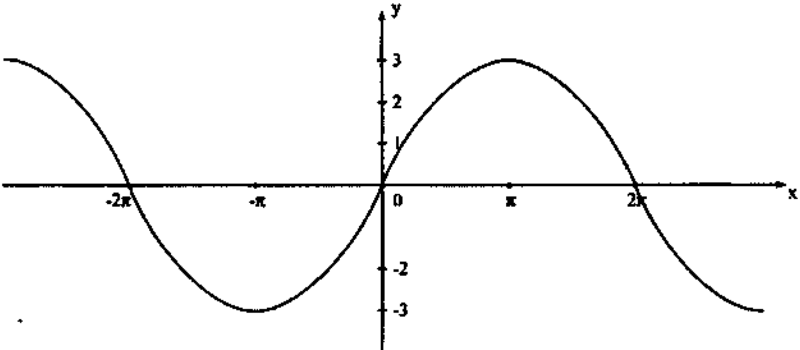
В функции $y(x)$ выделим целую часть $y=\frac{(2x+2)+1}{x+1}=$ $=\frac{2(x+2)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$. Из этой записи видно, что для построения графика функции $y=\frac{2x+3}{x+1}$ надо график функции $y=\frac{1}{x}$ сместить на 1 единицу влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат.



Пример 8

Построим синусоиду $y=3\sin 0,5x$.

Из такой записи следует, что для построения графика функции $y=3\sin 0{,}5x$ надо график функции $y=\sin x$ растянуть в 3 раза вдоль оси ординат и растянуть в $\frac{1}{0{,}5}=2$ раза вдоль оси абсцисс.

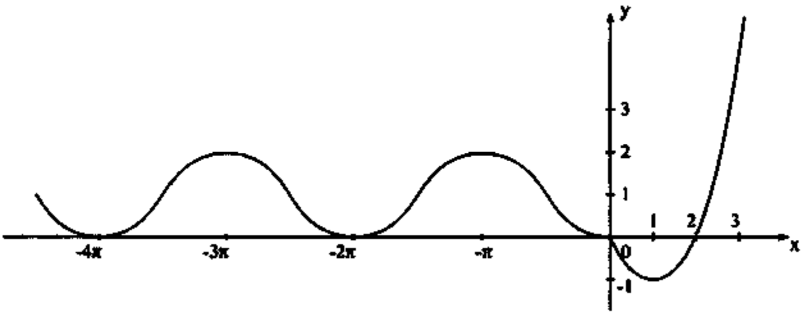


С использованием изложенных приемов строятся графики функций, которые задаются **несколькими формулами**.

Пример 9

Построим график функции $y = \begin{cases} 1-\cos x, \text{ если } x<0 \\ x^2-2x, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$.

Используя формулу понижения степени и формулу квадрата разности, запишем функцию в виде $y = \begin{cases} 2\sin^2\dfrac{x}{2}, \text{ если } x<0 \\ (x-1)^2-1, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$. График функции состоит из двух частей. При $x<0$ надо построить график функции $y=2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Он получается из графика функции $y=\sin^2 x$ растяжением в два раза вдоль осей ординат и абсцисс.

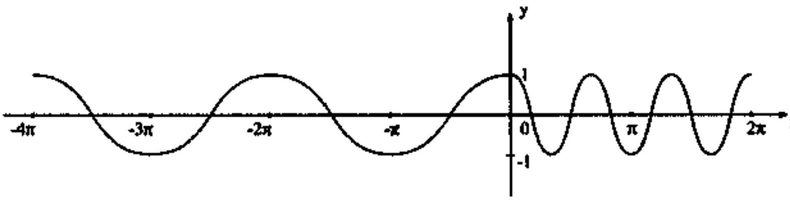


При $x\ge 0$ строим график функции $y=(x-1)^2-1$. Он получается из графика функции $y=x^2$ смещением на одну единицу вправо вдоль оси абсцисс и на одну единицу вниз вдоль оси ординат.

Пример 10

Построим график сложной функции $y=\cos(2x+|x|)$.

Напомним, что аргумент функции косинус представляет собой функцию переменной x и поэтому данная функция является сложной. Раскроем знак модуля и получим $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x<0 \\ \cos 3x, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$. Для двух таких промежутков построим график функции $y(x)$. Учтем, что при $x\ge 0$ график функции $y=\cos 3x$ получается из графика функции $y=\cos x$ сжатием в 3 раза вдоль оси абсцисс.



Отображение

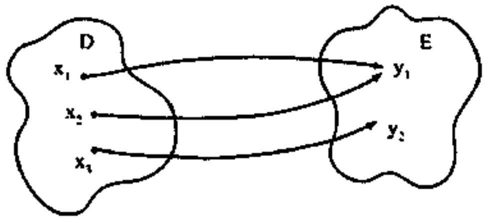
Функцию с областью определения D и областью значений E называют также **отображением множества D на множество E**. Можно сказать, например, что формула $y=\sqrt{1-x^2}$ задает отображение отрезка $[-1; 1]$ на отрезок $[0; 1]$, формула $y=\cos x$ задает отображение множества R действительных чисел на отрезок $[-1; 1]$. Термины «функция» и «отображение» являются **синонимами**.

Нередко рассматривают функции (отображения), область определения или область значений которых (а также и оба этих множества) не являются числовыми множествами. С такими примерами вы уже встречались в геометрии. Например, областью определения функции «Площадь треугольника» при заданной единице измерения площадей является множество всех треугольников плоскости. Область значений этой функции – множество положительных чисел (вырожденные треугольники, то есть отрезки и точки, не рассматриваются).

Движение и преобразования подобия, переводящее фигуру F в фигуру F', также является отображением, его область определения F и область значений F' состоят из точек.

Понятие отображения (или функции) применимо и в повседневной жизни. Например, в гардеробе театра при сдаче верхней одежды множество предметов такой одежды отображается на множество номерков. При этом множество предметов одежды является областью определения, множество номерков – областью значений. При обратном процессе (выдаче одежды после спектакля) множество номерков отображается на множество предметов одежды. В этом случае множество номерков – область определения, множество предметов одежды – область значений.

Понятие отображения относят к числу основных понятий всей математики. С его помощью можно дать такое **определение функции**: функцией с областью определения D и областью значений E называется такое отображение множества D на множество E, при котором **каждому элементу множества D соответствует один вполне определенный элемент множества E и каждый элемент множества E поставлен в соответствие некоторому** (хотя бы одному) **элементу множества D** (см. рис.).



IV. Задание на уроке

№ 52 (а, б); 53 (а, в); 54 (а, б); 55 (а, г); 56 (а, б).

V. Контрольные вопросы

На примере функции $f(x) = \sin x$ объясните построение графика функции:

1) $y = \sin x - 2$; 2) $y = 3\sin x$; 3) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = \sin 0{,}5x$; 5) $y = -\sin x$; 6) $y = \sin(-x)$.

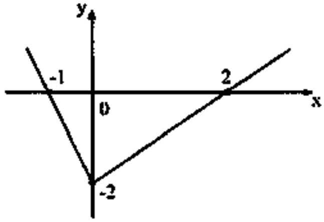
VI. Задание на дом

№ 52 (в, г); 53 (б, г); 54 (в, г); 55 (б, в); 56 (в, г).

VII. Творческие задания

1. Используя приведенный график функции $y = f(x)$, постройте графики функций:

а) $y = f(x) + 3$; б) $y = f(x) - 1$; в) $y = 2f(x)$; г) $y = 0{,}5f(x)$;
д) $y = f(x + 1)$; е) $y = f(x - 2)$; ж) $y = -f(x)$; з) $y = f(-x)$;
и) $y = -2f(x)$; к) $y = f(-0{,}5x)$; л) $y = f(-x) + 2$; м) $y = f(-x + 2)$;
н) $y = 3f(-x) + 2$.



2. Постройте график функции:

а) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = \sin 2x - 1$;

г) $y = \cos 0{,}5x + 2$; д) $y = -2\sin 0{,}5x$; е) $y = -3\cos 2x$;

ж) $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; з) $y = -\mathrm{ctg}\, 2x$; и) $y = \mathrm{ctg}(-0{,}5x)$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 23–24. Преобразования графиков с модулями

Цель: освоить основные навыки преобразования графиков с модулями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(-x) + 2$?

2. Постройте график функции $y = -\mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

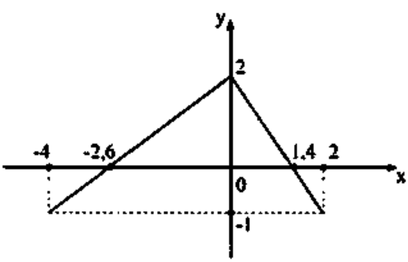
Вариант 2

1. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(-x) - 1$?

2. Постройте график функции $y = 2\mathrm{tg}(-x)$.

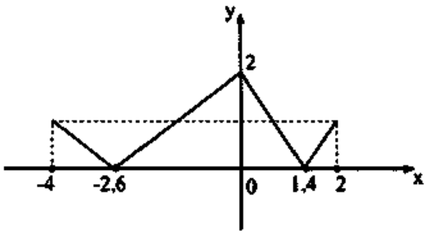
III. Изучение нового материала

Из предыдущего урока видно, что способы преобразования графиков чрезвычайно полезны при их построении. Поэтому рассмотрим также основные **способы преобразования графиков, содержащих модули**. Эти способы также являются **универсальными** и пригодны **для любых функций**. Для простоты построения будем рассматривать кусочно-линейную функцию $f(x)$ с областью определения $D(x)$, график которой представлен на рисунке. Рассмотрим **три стандартных преобразования графиков с модулями**.



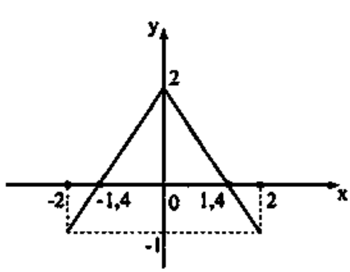
1) Построение графика функции $y = |f(x)|$

По определению модуля получаем $y=\begin{cases} f(x), \text{если } f(x)\geq 0 \\ -f(x), \text{если } f(x)<0 \end{cases}$. Это означает, что **для построения графика** функции $y = |f(x)|$ **надо сохранить часть графика** функции $y = f(x)$, **для которой** $y \geq 0$. Ту **часть графика** функции, **для которой** $y < 0$, **надо симметрично отразить вверх относительно оси абсцисс.**



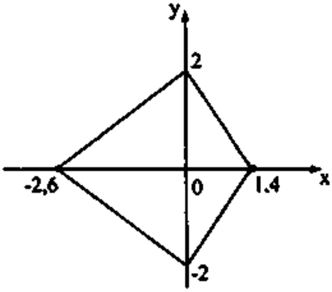
2) Построение графика функции $y = f(|x|)$

Раскроем модуль и получим $y=\begin{cases} f(x), \text{если } f(x)\geq 0 \\ f(-x), \text{если } f(x)<0 \end{cases}$. Поэтому **для построения графика** функции $y = f(|x|)$ **надо сохранить часть графика** функции $y = f(x)$, **для которой** $x \geq 0$. Кроме того, **эту часть надо симметрично отразить влево относительно оси ординат.**



3) Построение графика уравнения $|y| = f(x)$

По определению модуля имеем, что при $f(x) \geq 0$ надо построить графики двух функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. Это означает, что **для построения графика** уравнения $|y| = f(x)$ **надо сохранить часть графика** функции $y = f(x)$, **для которой** $y \geq 0$. Кроме того, **эту часть надо симметрично отразить вниз относительно оси абсцисс.**



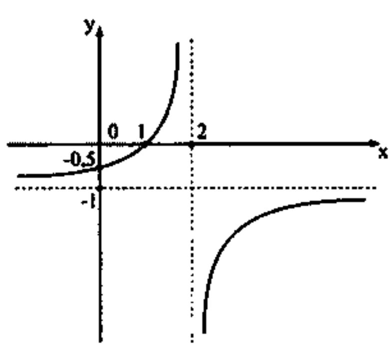
Заметим, что **зависимость $|y| = f(x)$ не задает функцию**, то есть при $x \in (-2,6;\ 1,4)$ каждому значению x соответствуют два значения y. Поэтому на рисунке представлен именно **график уравнения** $|y| = f(x)$.

Используем рассмотренные способы преобразования графиков с модулями для построения графиков более сложных функций и уравнений.

Пример 1

Построим график функции $y = \dfrac{1-x}{x-2}$.

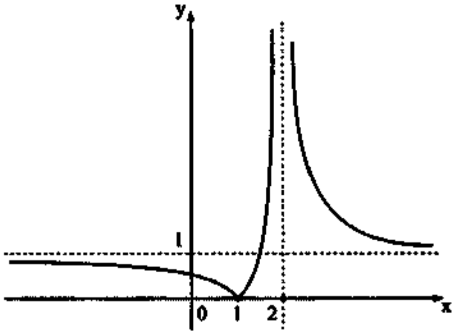
Выделим в этой функции целую часть: $y = \dfrac{-(x-2)-1}{x-2} = -1 - \dfrac{1}{x-2}$. Такой график получается при смещении графика функции $y = -\dfrac{1}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вниз. Графиком данной функции является гипербола.



Пример 2

Построим график функции $y = \left|\dfrac{1-x}{x-2}\right|$.

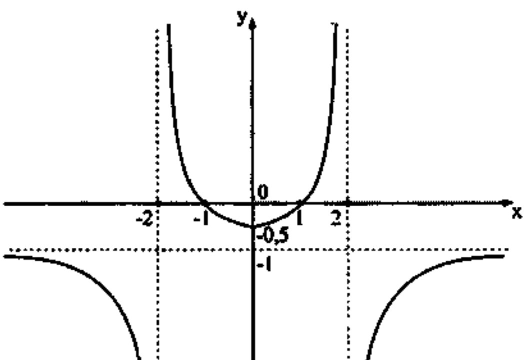
В соответствии со способом 1 сохраним часть графика из примера 1, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика, для которой $y < 0$, симметрично отразим вверх относительно оси абсцисс.



Пример 3

Построим график функции $y = \dfrac{1-|x|}{|x|-2}$.

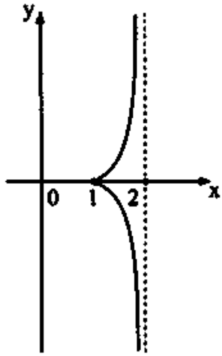
Используя способ 2, сохраним часть графика из примера 1, для которой $x \geq 0$. Эту сохраненную часть, кроме того, зеркально отразим влево относительно оси ординат. Получаем график функции, симметричный относительно оси ординат.



Пример 4

Построим график уравнения $|y| = \dfrac{1-x}{x-2}$.

В соответствии со способом 3 сохраним часть графика из примера 1, для которой $y \geq 0$. Кроме того, эту сохраненную часть симметрично отразим вниз относительно оси абсцисс. Получаем график данного уравнения.



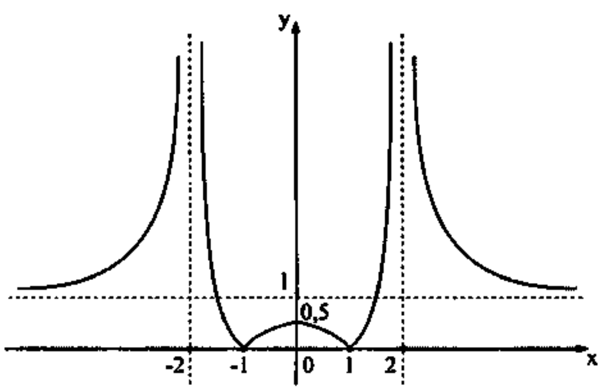
Разумеется, рассмотренные способы преобразования графиков могут использоваться и совместно.

Пример 5

Построим график функции $y=\left|\dfrac{1-|x|}{|x|-2}\right|$.

Используем график функции $y=\dfrac{1-|x|}{|x|-2}$, построенный в примере 3.

Чтобы построить данный график, сохраним те части графика 3, для которых $y \geq 0$. Те части графика 3, для которых $y < 0$, симметрично отразим вверх относительно оси абсцисс.

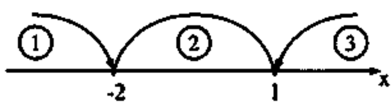


В тех случаях, когда модули входят в зависимость иным образом (чем в способах 1–3), необходимо эти модули раскрыть.

Пример 6

Построим график функции $y = |x - 1| - |x + 2|$.

Выражения $x - 1$ и $x + 2$, входящие под знаки модулей, меняют свои знаки в точках $x = 1$ и $x = -2$ соответственно. Отметим эти точки на координатной прямой. Они разбивают ее на три интервала. Используя определения модуля, раскроем модули в каждом промежутке.



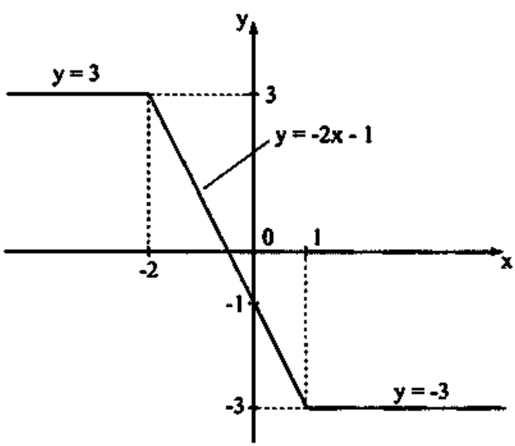
Получаем:

1) При $x < -2$ $y = -(x-1) + (x+2) = 3$.

2) При $-2 \le x \le 1$ $y = -(x-1) - (x+2) = -2x - 1$.

3) При $x > 1$ $y = (x-1) - (x+2) = 3 - 3$.

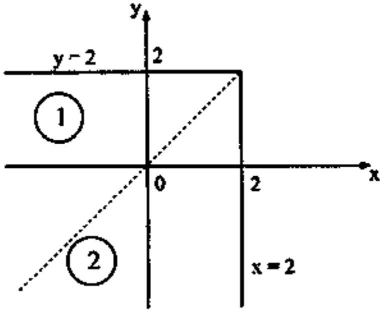
Построим графики этих функций, учитывая интервалы для переменной x, в которых раскрывались знаки модуля. Получаем ломаную прямую.



Достаточно часто при построении графиков уравнений с модулями для их раскрытия используют координатную плоскость. Поясним это следующим примером.

Пример 7

Построим график уравнения $|y - x| + y + x = 4$.

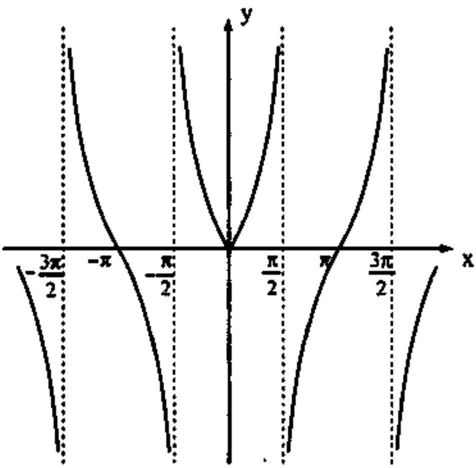


Выражение $y-x$ меняет свой знак на прямой $y=x$. Построим эту прямую – биссектрису первого и третьего координатных углов. Эта прямая разбивает точки плоскости на две области: *1* – точки, расположенные над прямой $y=x$; *2* – точки, расположенные под этой прямой. Раскроем модуль в таких областях. В области *1* возьмем, например, контрольную точку (0; 5). Видим, что для этой точки выражение $y-x>0$. Раскрывая модуль, получаем: $y-x+y+x=4$ или $y=2$. Строим такую прямую в пределах первой области. Очевидно, в области *2* выражение $y-x<0$. Раскрывая модуль, имеем: $-(y-x)+y+x=4$ или $x=2$. Строим эту прямую в пределах второй области. Получаем график данного уравнения.

Рассмотренные способы построения графиков с модулями, естественно, пригодны для любых функций, в том числе и тригонометрических.

Пример 8

Построим график функции $y=\mathrm{tg}|x|$.



Используя способ 2, построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ для $x \geq 0$. Этот график симметрично отражаем влево относительно оси ординат. В итоге получаем график функции $y = \operatorname{tg}|x|$.

IV. Задание на уроке и дома

1. Постройте графики линейных функций и уравнений:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = |2x - 3|$; в) $y = 2|x| - 3$;
г) $|y| = 2x - 3$; д) $y = |2|x| - 3|$; е) $|y| = 2|x| - 3$;
ж) $y = |x - 2| - |x + 3|$; з) $y = 2|x + 1| + |x - 3|$; и) $|y + x| - 2x = 1$;
к) $|y - x| + 2x = 3$; л) $|y - x + 1| = 2$; м) $|y + x - 2| = 1$.

2. Построить графики квадратичных функций и уравнений:

а) $y = x^2 + 2x - 3$; б) $y = |x^2 + 2x - 3|$; в) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
г) $|y| = x^2 + 2x - 3$; д) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$; е) $|y| = x^2 + 2|x| - 3$;
ж) $x = y^2 - 2y - 3$; з) $|x| = y^2 - 2y - 3$; и) $x = y^2 - 2|y| - 3$.

3. Построить графики дробно-линейных функций и уравнений:

а) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$; б) $y = \left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$; в) $y = \dfrac{|x|-2}{|x|-1}$;
г) $|y| = \dfrac{x-2}{x-1}$; д) $y = \dfrac{|x-2|}{x-1}$; е) $y = \dfrac{x-2}{|x-1|}$;
ж) $y = \dfrac{|x|-2}{x-1}$; з) $y = \dfrac{x-2}{|x|-1}$.

4. Построить графики тригонометрических функций и уравнений:

а) $y = \sin x$; б) $y = |\sin x|$; в) $y = \sin|x|$;
г) $|y| = \sin x$; д) $y = \operatorname{tg} x$; е) $|y| = \operatorname{tg}|x|$;
ж) $|y| = |\operatorname{tg} x|$; з) $y = |\cos x|$; и) $|y| = \cos x$;
к) $y = |\operatorname{ctg} x|$; л) $y = \operatorname{ctg}|x|$; м) $|y| = \operatorname{ctg} x$.

V. Контрольные вопросы

1. Как, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = |f(x)|$?

2. С помощью графика функции $y = f(x)$ постройте график функции $y = f(|x|)$.

3. Как с помощью графика функции $y = f(x)$ построить график уравнения $|y| = f(x)$?

VI. Подведение итогов урока

Уроки 25–26. Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций

Цель: продолжить изучение основных свойств функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y=|x-1|+|x+2|$; б) $y=2|\sin x|$.

2. Постройте график уравнения $|y|=\operatorname{ctg}|x|$.

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y=|x+2|-|x-1|$; б) $y=|\operatorname{tg} x|$.

2. Постройте график уравнения $|y|=2\sin|x|$.

III. Изучение нового материала

Четность и нечетность функций

Рассмотрим еще одно свойство функции – **четность**. Предварительно введем еще одно понятие – **симметричность** области определения. Область определения называется **симметричной**, если функция определена и в точке x_0 и в точке $(-x_0)$ (то есть в точке симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 1

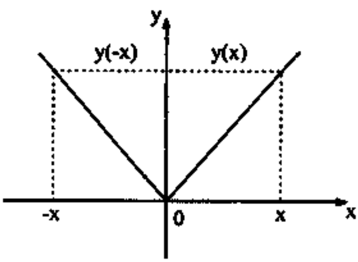
а) Областью определения функции $y=\dfrac{2-3x}{x^2-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2-4=0$ (то есть $x=\pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x=-1$, так и при $x=-(-1)=1$. И наоборот, эта функция не определена и при $x=-2$ и при $x=-(-2)=2$. Следовательно, область определения данной функции $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$ симметричная.

б) Областью определения функции $y=\dfrac{2-3x}{x-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x-4=0$ (то есть $x=4$). Поэтому эта функция определена в точке $x=-4$, но не определена в симметричной точке $x = -(-4) = 4$. Поэтому область определения данной функции $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ не является симметричной.

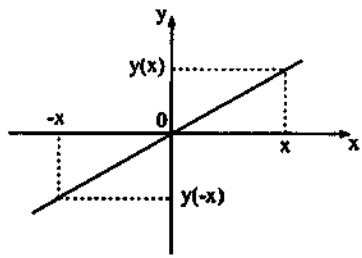
Понятие **четности** функции вводится **только** для функции **с симметричной областью определения. Функция** называется **четной,** если **при изменении знака аргумента, значение функции не меняется,** то есть $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда **симметричен относительно оси ординат**.

Функция называется **нечетной,** если **при изменении знака аргумента значение функции** также **меняется на противоположное,** то есть $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции всегда **симметричен относительно начала координат**.

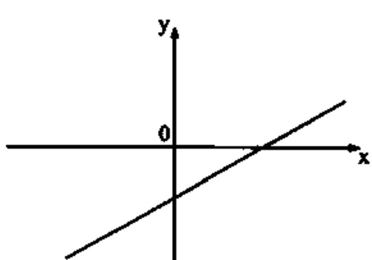
На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция
$y(-x) = y(x)$



Нечетная функция
$y(-x) = -y(x)$



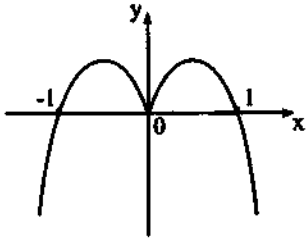
Функция,
не имеющая четности

Пример 2

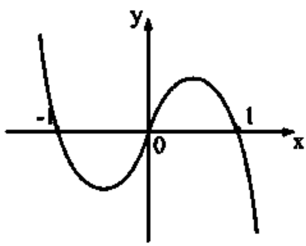
Выяснить четность функций: а) $y = |x| - x^2$; б) $y = x - x^3$; в) $y = x - 2$.

Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций $x \in (-\infty; +\infty)$ симметричные. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ надо найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

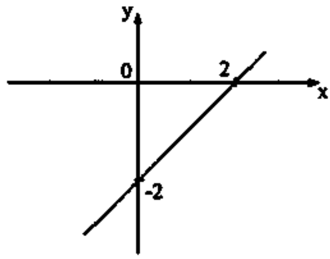
а) $y(-x)=|-x|-(-x)^2=|x|-x^2$ (здесь учтено, что $|-x|=|x|$ и $(-x)^2=x^2$). Теперь легко увидеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, то есть $y(-x)=y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $y(-x)=-x-(-x)^3=-x-(-x^3)=-x+x^3=-(x-x^3)=-y(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, то есть $y(-x)=-y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) $y(-x)=-x-2$. Сравним значение $y(-x)=-x-2$ со значением $y(x)=x-2$. Видим, что равенство $y(-x)=y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-y(x)=-(x-2)=2-x$. Сравнивания значение $y(-x)=-x-2$ со значением $-y(x)=2-x$, видим, что равенство $y(-x)=-y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.



Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

Понятие четности и нечетности функции облегчает построение ее графика. Достаточно **построить часть графика для неотрицательных значений** x, а затем **отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной функции).**

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 3

Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ является четной, так как ее область определения $D(f)=(-\infty;\infty)$ симметрична и $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$.

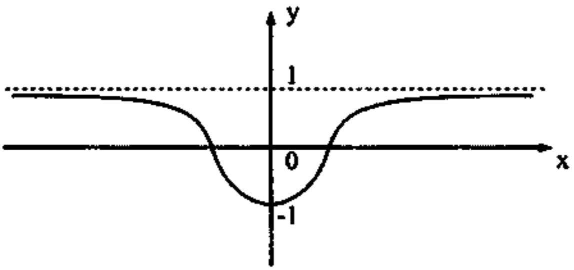


График этой функции симметричен относительно оси ординат.

Основные тригонометрические функции **синус, тангенс и котангенс – нечетные,** а **косинус – четная.** Поэтому **графики синуса, тангенса и котангенса симметричны относительно начала координат, а график косинуса симметричен относительно оси ординат.**

Пример 4

Выяснить четность или нечетность функции $f(x)=\sin(x^3)-$ $-3\operatorname{tg}^5 x+2\operatorname{ctg}(4x)$.

Очевидно, что область определения данной функции – все значения x, кроме точек $x=\dfrac{\pi}{2}n$ (где $n\in Z$), является симметричной. Найдем

$f(-x)=\sin((-x)^3)-3\operatorname{tg}^5(-x)+2\operatorname{ctg}(-4x)=\sin(-x)^3-3(-\operatorname{tg}x)^5-$ $-2\operatorname{ctg}(4x)=-\sin(x^3)+3\operatorname{tg}^5x-2\operatorname{ctg}(4x)=-(\sin(x^3)-3\operatorname{tg}^5x+$ $+2\operatorname{ctg}(4x))=-f(x)$. Так как выполнено равенство $f(-x)=-f(x)$, то по определению данная функция является нечетной.

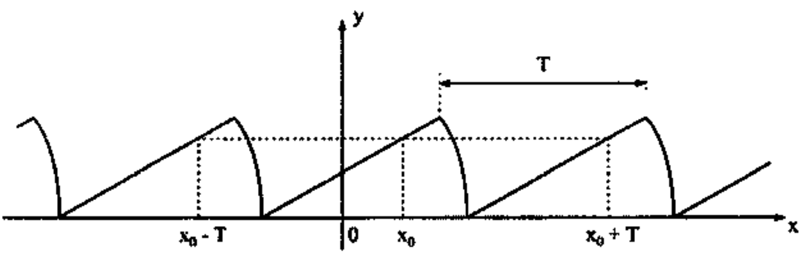
Периодичность функций

Перейдем к следующему **свойству** функции – **периодичности**. Многие реальные явления и процессы имеют **повторяющийся (периодический) характер**. Например, минутная стрелка занимает такое же положение на циферблате часов через каждый час. Такого типа **процессы** называют **периодическими**, а **функции**, их описывающие, – **периодическими**.

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом T (T – некоторое действительное число, отличное от нуля), если:

1) для любого x из области определения функции значение аргумента $x \pm T$ также принадлежит области определения функции;

2) выполняется равенство $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$. Обычно под периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов.



Исходя из определения тригонометрических функций, нетрудно установить, что **период функций** $\sin x$ и $\cos x$ составляет 2π, период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ – π. Действительно, функции синус и косинус определены на всей числовой оси и $\sin(x+2\pi) = \sin x$ и $\cos(x+2\pi) = \cos x$ для любого x. Аналогично, области определения функций тангенс и котангенс включают как точку x, так и точки $x \pm \pi$. При этом выполняются равенства $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$.

Пример 5

Докажем, что если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то при любом целом $n \neq 0$ число nT также период этой функции.

Пусть для определенности $n = 4$. Тогда нужно доказать, что число $4T$ является также периодом функции $f(x)$. Найдем $f(x+4T) =$
$= f((x+3T)+T) = f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) =$
$= f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$. Итак, было показано, что для любого x выполнено равенство $f(x+4T) = f(x)$. Поэтому по определению число $4T$ является также периодом функции $f(x)$.

Пример 6

Найти период функции $f(x) = A\sin(wx+\varphi)$, где $A \neq 0$, $w \neq 0$.

Предположим, что $T \neq 0$ – период функции $f(x)$. Тогда для определения T имеем уравнение $A\sin\left[w(x+T)+\varphi\right] = A\sin(wx+\varphi)$ или $\sin\left[w(x+T)+\varphi\right] - \sin(wx+\varphi) = 0$, следовательно, $2\cos\left(wx+\varphi+\dfrac{wT}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{wT}{2} = 0$. Так как x – произвольный аргумент из области определения функции, то $\cos\left(wx+\varphi+\dfrac{wT}{2}\right) \neq 0$.

Следовательно, $\sin\dfrac{wT}{2} = 0$, откуда $\dfrac{wT}{2} = \pi n$, $n \in Z$ и $T = \dfrac{2\pi}{w}n$.

Наименьший положительный период $\dot{T} = \dfrac{2\pi}{w}$. Например, для функции $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{\pi}{7}\right)$ наименьший положительный период $T = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \dfrac{8\pi}{3}$.

Аналогично можно найти, что для функции $f(x) = A\cos(wx+\varphi)$ также наименьший положительный период $T = \dfrac{2\pi}{w}$, для функций $f(x) = A\,\mathrm{tg}(wx+\varphi)$ и $f(x) = A\,\mathrm{ctg}(wx+\varphi)$ период $T = \dfrac{\pi}{w}$.

Отметим, что сумма, разность, произведение и частное двух периодических функций может быть как периодической, так и непериодической функцией. В частности, алгебраическая сумма периодических функций будет функцией периодической, если периоды этих функций соизмеримы (то есть если их отношение число рациональное).

Пример 7

Найти период функции $f(x) = \cos 2x + 3\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(\dfrac{4}{5}x+1\right) + 7$.

Функция $f(x)$ является алгебраической суммой трех периодических функций, периоды которых, соответственно, π, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$. Представим эти числа в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{12\pi}{12}$; $\frac{8\pi}{12}$; $\frac{15\pi}{12}$. Видим, что эти числа соизмеримы, и их общей мерой является число $\frac{\pi}{12}$. Для определения периода $f(x)$ найдем наименьшее общее кратное чисел 12, 8 и 15, которое равно 120. Поэтому $T = 120 \cdot \frac{\pi}{12} = 10\pi$.

Отметим также, что сложная функция, промежуточным аргументом которой служит периодическая функция, есть функция периодическая. Например, $f(x) = \frac{1}{3}\sin^3\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6\,\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1}{\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3}$ – функции периодические.

Определение периодической функции также может быть использовано для доказательства непериодичности функций.

Пример 8

Доказать, что функция $f(x) = \sin x^2$ не периодическая. Предположим, что функция $f(x)$ имеет период T. Тогда должно быть выполнено равенство $\sin(x+T)^2 = \sin x^2$, или $\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0$, или $2\cos\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2}\right)\sin\left(Tx + \frac{T^2}{2}\right) = 0$. Так как x – произвольный аргумент, то данное равенство для произвольного x не выполняется и, следовательно, не существует числа T. Поэтому функция $f(x) = \sin x^2$ не является периодической.

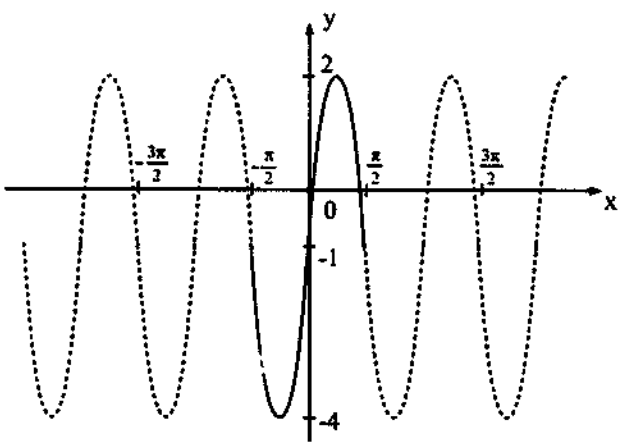
Разумеется, **периодичность функции облегчает построение ее графика**. Это уже использовалось ранее при построении графиков тригонометрических функций. **Для построения графика** периодической **функции с периодом** T достаточно **построить этот график при изменении аргумента на любом отрезке длиной** T. Затем такой **график параллельно переносится на расстояния** nT (где n – любое натуральное число) **вправо и влево вдоль оси абсцисс**.

Пусть (x_0; y_0) – точка графика периодической функции $f(x)$. **В силу периодичности** такой функции при любом целом n **точка** $x_0 + nT$ **принадлежит области определения** функции $f(x)$ **и справедливо равенство** $f(x_0+nT)=f(x_0)=y_0$. Поэтому **точка** $(x_0+nT;\ y_0)$, **полученная при параллельном переносе точки** (x_0; y_0) **вдоль оси абсцисс** на вектор (nT; 0), **также принадлежит графику** функции $f(x)$.

Пример 9

Построим график функции $y = 3\sin 2x - 1$.

Очевидно, что такая функция является периодической с периодом $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$. Поэтому построим график этой функции на промежутке длиной π, например, на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Для этого (в соответствии с преобразованиями графиков) график функции $y = \sin x$ сжимаем в 2 раза вдоль оси Ox, растягиваем в 3 раза вдоль оси Oy и опускаем вниз на 1 единицу. Затем с помощью параллельных переносов продолжаем его на всю числовую прямую.



IV. Задание на уроке

№ 57 (б); 58 (в); 60 (б); 61 (а); 62 (б); 65 (а, г); 66 (б); 68 (а, в); 69, 72 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение четной (нечетной) функции.
2. Какой симметрией обладает график четной (нечетной) функции?
3. Дайте определение периодической функции.

4. Какие наименьшие положительные периоды имеют основные тригонометрические функции?

5. Как построить график периодической функции?

VI. Задание на дом

№ 57 (в); 58 (г); 60 (г); 61 (г); 62 (г); 65 (б, в); 66 (в); 68 (б, г); 70, 72 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 27–28. Возрастание и убывание функций. Экстремумы

Цель: дать понятие монотонности, промежутков возрастания и убывания, экстремумов функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение четной функции. Какой симметрией обладает график этой функции?

2. Определите четность или нечетность функции (с доказательством): $f(x) = 3x^5 \cos 2x - 2\,\mathrm{tg}^3 x + 8x^5$.

3. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x + 8\,\mathrm{tg}\,x$.

Вариант 2

1. Дайте определение нечетной функции. Какой симметрией обладает график этой функции?

2. Определите четность или нечетность функции (с доказательством): $f(x) = 2x \sin 3x + 6\,\mathrm{ctg}^4 x - 7x^6$.

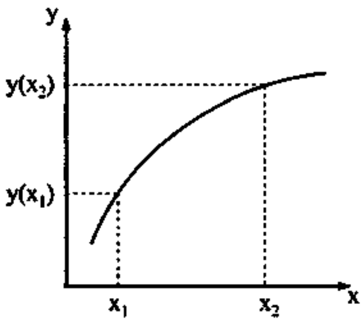
3. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x - 3\,\mathrm{ctg}\,2x$.

III. Изучение нового материала

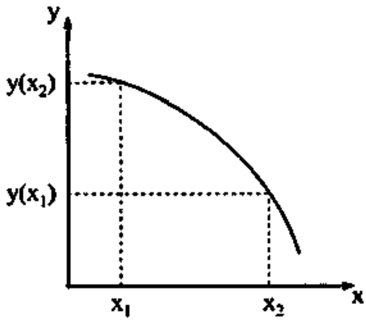
Монотонность функций

Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (то есть **возрастание или убывание функции**). Функция называется **возрас-**

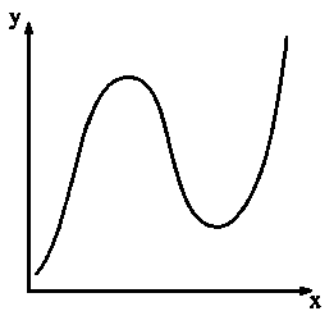
тающей, если **бóльшему значению аргумента** соответствует **бóльшее значение функции** (то есть если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) > y(x_1)$). Функция называется **убывающей**, если **бóльшему значению аргумента** соответствует **мéньшее значение функции** (то есть если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) < y(x_1)$). На рисунке приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция
$y(x_2) > y(x_1)$



Убывающая функция
$y(x_2) < y(x_1)$

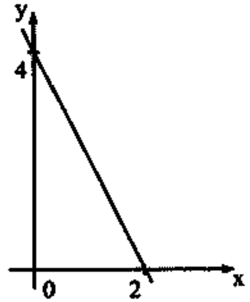


Немонотонная функция

Пример 1

Определить монотонность функции $y(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции – все значения x, то есть $x \in (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1) = -2x_1 + 4$ и $y(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $y(x_2)-y(x_1)=(-2x_2+4)-(-2x_1+4)=$ $=-2x_2+4+2x_1-4=-2(x_2-x_1)$.



Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому получаем $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции.

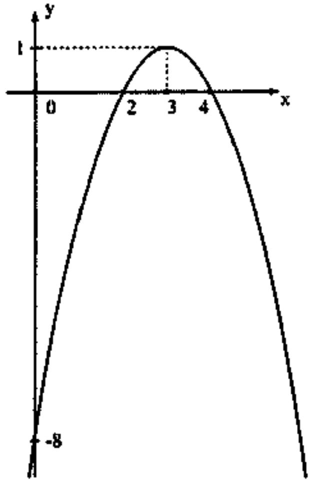
Функция по всей области определения может быть **немонотонной**, но **на отдельных промежутках** функция может быть **монотонной**. Например, функция $y=-x^2+6x-8$ в целом **немонотонна**, но на промежутке $x\in[3;+\infty)$ функция **убывает**, а на промежутке $x\in(-\infty;3]$ – **возрастает** (докажем это). Соответственно, такие промежутки называют **промежутками убывания и возрастания функции** $y(x)$.

Пример 2

Областью определения функции $y=-x^2+6x-8$ является $D(y)=(-\infty;\infty)$. Возьмем два значения x из области определения x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1)=-x_1^2+6x_1-8$ и $y(x_2)=-x_2^2+6x_2-8$. Сравним эти значения. Рассмотрим разность этих величин $y(x_2)-y(x_1)=-x_2^2+x_1^2+6x_2-6x_1=$ $=(x_2-x_1)(x_2+x_1)+6(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(6-x_2-x_1)$. Первый множитель $x_2 - x_1$ в этом произведении положительный, так как $x_2 > x_1$ по договоренности. Второй же множитель может иметь разный знак. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x_1 < x_2 \le 3$, Тогда $x_1 + x_2 < 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 > 0$. Поэтому произведение положительно и $y(x_2) - y(x_1) > 0$, то есть $y(x_2) > y(x_1)$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.

б) Пусть $x_2 > x_1 \geq 3$, тогда $x_1 + x_2 > 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 < 0$. Поэтому произведение отрицательно и $y(x_2) - y(x_1) < 0$, то есть $y(x_2) < y(x_1)$. Следовательно, функция $y(x)$ убывает на промежутке $[3; \infty)$.



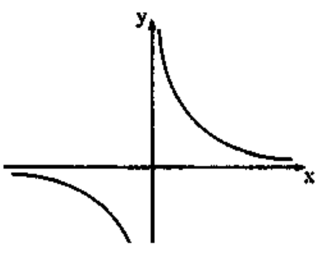
Из графика данной функции видны промежутки возрастания и убывания.

Если область определения функции состоит из нескольких промежутков, то при исследовании функции на монотонность надо выбирать точки x_1 и x_2, лежащие в одном промежутке.

Пример 3

Исследуем на монотонность функцию $y = \dfrac{1}{x}$.

Область определения данной функции – промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. График этой функции (гипербола) хорошо известен.



Видно, что функция убывает в области определения. Исследуем ее на монотонность. Выберем точки x_1 и x_2 из области определения, так что $x_2 > x_1$. Найдем разность $y(x_2) - y(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то числитель этой дроби отрицательный. Если x_1 и x_2 лежат в одном промежутке области определения (то есть x_1, $x_2 < 0$ или x_1, $x_2 > 0$), то произведение $x_1 \cdot x_2 > 0$. Поэтому дробь отрицательна, то есть $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. В итоге получаем правильный результат – функция является убывающей.

Если x_1 и x_2 лежат в разных промежутках области определения (то есть $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$), то произведение $x_1 x_2 < 0$. Поэтому дробь положительна, то есть $y(x_2) - y(x_1) > 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. В результате получаем грубую ошибку – функция является возрастающей.

Монотонность тригонометрических функций

Так как графики основных тригонометрических функций известны, то по ним легко установить их монотонность. Такие результаты приведены в таблице (n –любое целое число).

Функция	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	–
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	–	$(\pi n; \pi + \pi n)$

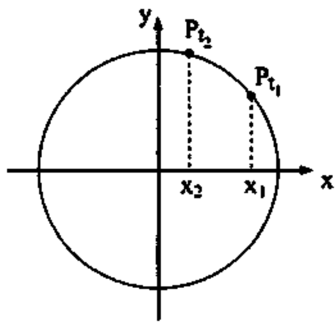
Обосновать и доказать данные таблицы можно аналитически.

Пример 4

Докажем, что функция $y = \cos x$ убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$.

Понятно, что в силу периодичности косинуса достаточно доказать утверждение для промежутка $[0; \pi]$. Используя определение убывающей функции и формулу разности косинусов, получим: $y(x_2) - y(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\sin\frac{x_2 + x_1}{2}$. Определим знак этого выражения, найдя знак каждого множителя. Из неравенства $0 \le x_1 < x_2 \le \pi$ можно получить: $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \le \frac{\pi}{2}$ и $0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ и $\sin\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Следовательно, данное произведение отрицательно, то есть $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. Таким образом, на указанных промежутках функция $y = \cos x$ убывает.



Полученный результат легко проиллюстрировать с помощью единичной окружности. Если $0 \le t_1 < t_2 \le \pi$, то точка P_{t_1}, естественно, имеет абсциссу x_1 большую, чем абсцисса x_2 точки P_{t_2}.

Пример 5

Докажем, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $(\pi n; \pi + \pi n)$, где $n \in Z$.

Данное утверждение достаточно доказать для промежутка $(0; \pi)$. Используя определение убывающей функции и функции котангенс, получим: $y(x_2) - y(x_1) = \operatorname{ctg} x_2 - \operatorname{ctg} x_1 = \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} = \frac{\sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} =$

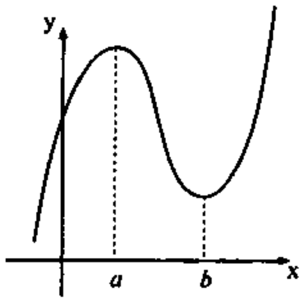
$= \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2}$. Определим знак этого выражения. Так как $0 < x_1 < x_2 < \pi$, то $\sin x_1 > 0$ и $\sin x_2 > 0$. Поэтому знаменатель дроби положительный. Из неравенства находим $-\pi < x_1 - x_2 < 0$, тогда $\sin(x_1 - x_2) < 0$. Поэтому дробь отрицательна, то есть $y(x_2) - y(x_1) < 0$ или $y(x_2) < y(x_1)$. Следовательно, на указанных промежутках функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает.

Экстремумы функций

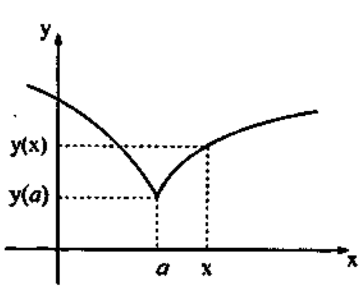
При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки $x = a$ удобно пользоваться понятием окрестности этой точки. **Окрестно-**

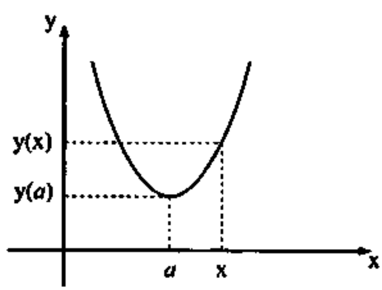
стью точки *a* называют любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервалы (3; 10), (4; 6), (4,8; 5,1) – некоторые окрестности точки $a = 5$.

Характерным свойством функции $y(x)$ являются **точки экстремума** – точки, в которых **меняется монотонность** функции. При этом, если **возрастание** функции **сменяется** ее **убыванием**, то такая точка a – **точка максимума**. Если, наоборот, **убывание** функции **сменяется** ее **возрастанием**, то такая точка b – **точка минимума**. Дадим более точное определение точек экстремума.



Точка $x = a$ называется точкой минимума функции $y(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $y(x) \geq y(a)$. При этом значение $y(a)$ называется минимумом функции $y(x)$.





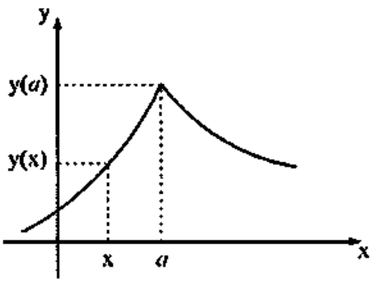
В простейших случаях легко найти точку минимума и минимум функции.

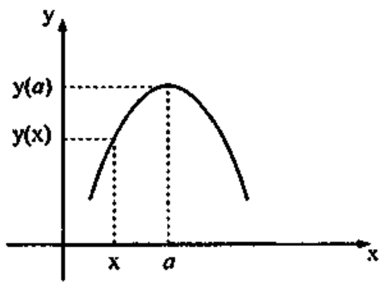
Пример 6

а) Для функции $y = x^2 + 6x + 10$ выделим полный квадрат суммы: $y = x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = 1 + (x + 3)^2$. Так как при всех значениях x величина $(x+3)^2 \geq 0$, то данная функция имеет минимум $y_{min} = 1$ при условии $x + 3 = 0$, то есть в точке минимума $x_{min} = -3$.

б) Для функции $y = 3|x-2|-4$ величина $|x-2| \geq 0$. Поэтому данная функция имеет минимум $y_{min} = -4$ при условии $x - 2 = 0$, то есть в точке минимума $x_{min} = 2$.

Точка $x = a$ называется точкой максимума функции $y(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $y(x) \leq y(a)$. При этом значение $y(a)$ называется максимумом функции $y(x)$.



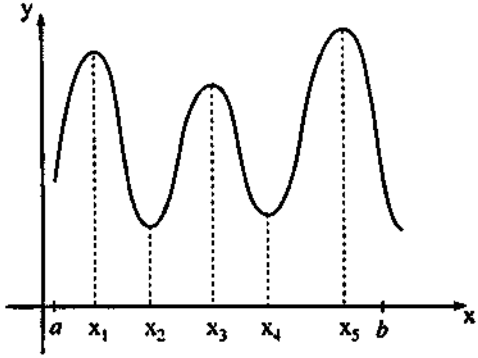


Пример 7

а) Для функции $y = 5-2|x+4|$ величина $|x+4| \geq 0$ при всех значениях x, поэтому данная функция имеет максимум $y_{max} = 5$ при условии $x + 4 = 0$, то есть в точке максимума $x_{max} = -4$.

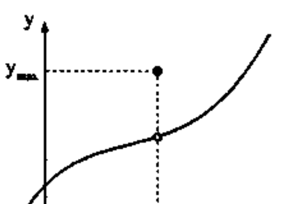
б) Для функции $y = -2-10(x-1)^2$ величина $(x-1)^2 \geq 1$ при всех значениях x. Поэтому данная функция имеет максимум $y_{max} = -2$ при условии $x - 1 = 0$, то есть в точке максимума $x_{max} = 1$.

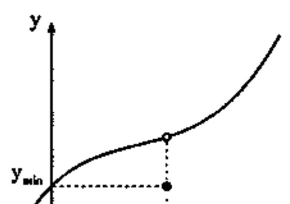
Заметим, что в определение минимума и максимума функции $y(x)$ входит «расплывчатое» для математики понятие «некоторой окрестности точки a». Но, к сожалению, уточнить это понятие невозможно. Предположим, что функция имеет несколько максимумов и минимумов (как показано на рисунке). Нам, например, надо найти максимумы этой функции. Есть подозрение, что функция $y(x)$ имеет максимум в точке x_3. Поэтому будем рассматривать окрестности этой точки. Если в качестве такой окрестности выбрать интервал $(a; b)$ достаточно большой длины, то по определению точка максимума $x_{max} = x_5$. Действительно, для такой окрестности $y(x) \leq y(x_5)$. Если в качестве окрестности выбрать интервал $(a; x_4)$, то $x_{max} = x_1$. Если в качестве окрестности выбрать интервал $(x_2; x_4)$, то $x_{max} = x_3$.

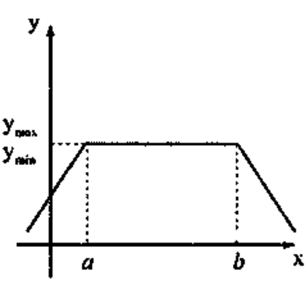


Итак, понятно, что «некоторая **окрестность**» должна быть достаточно **малой длины** (какой именно, не ясно). Кроме того, не понятно, **как искать точки экстремумов** (то есть в районе какой точки выбирать окрестность и проводить исследование). Ответы на эти вопросы дает только **математический анализ**.

Заметим, что обычно максимумы функций имеют вид гладких или заостренных пиков, минимумы – вид гладких или заостренных впадин (как это изображено на ранее представленных графиках). Однако для некоторых функций максимумы и минимумы могут иметь и **необычный вид**.







На последнем рисунке каждая точка промежутка (a; b) является и точкой минимума, и точкой максимума.

IV. Задание на уроке

№ 77 (а); 78 (б); 79 (г); 80 (а); 82 (в); 84 (а, б); 85 (а); 88 (б); 90 (а); 91 (а); 92 (б).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение возрастающей функции. Проиллюстрируйте его графиком.
2. Какая функция называется убывающей? Поясните на графике.
3. Дайте определение точки минимума функции. Что такое минимум функции? Проиллюстрируйте графиком.
4. Какая точка называется точкой максимума функции? Что такое максимум функции? Поясните на графике.
5. Какие точки считаются точками экстремума? Что такое экстремум функции?

VI. Задание на дом

№ 77 (г); 78 (а); 79 (а); 80 (б); 82 (а); 84 (в, г); 85 (в); 88 (г); 90 (г); 91 (г); 92 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 29–31. Исследование функций

Цель: отработать схему исследования функции и построения ее графика.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определения возрастающей функции и минимума функции.
2. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции $y = x^2 - 3|x|$. Постройте график этой функции.

Вариант 2

1. Дайте определения убывающей функции и максимума функции.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции $y = 2|x| - x^2$. Постройте график этой функции.

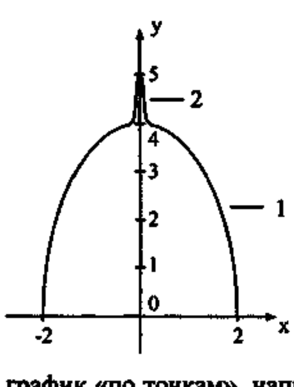
III. Изучение нового материала

Построение графиков функций

В младших классах, пожалуй, единственным способом построения графиков функций был способ построения «по точкам». В случае хорошо **изученных функций**: линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной, тригонометрической и т. д. такой **способ дает хорошие результаты**. В случае незнакомой функции при использовании этого способа можно просмотреть какие-то принципиальные особенности поведения функции. Например, в физике очень распространены **резонансные явления**. Суть их состоит в том, что **при плавном изменении** какой-то физической величины вдруг возникает **очень резкое ее увеличение или уменьшение.**

Пример 1

Не вдаваясь в сложные физические явления и терминологию, скажем, что зависимость мощности излучения лазера y от частоты излучения x примерно имеет структуру $y = \frac{5}{1+x^2} + \frac{0{,}01}{0{,}01+x^2} - 1$. Приблизительный график этой функции представлен на рисунке. Видно, что на фоне плавного изменения кривой *1* (которая описывается первым и третьим слагаемыми в функции) возникает очень узкий (резонансный) максимум *2* (который описывается вторым слагаемым в функции).



Если строить такой график «по точкам», например с шагом 0,5, то такой максимум будет просто пропущен. Вместе с тем его наличие свидетельствует об очень интересных и сложных физических явлениях в лазере. Использование этого максимума позволило создать сверхвысокоточные лазерные часы (стандарт частоты), локаторы, дальномеры и т. д. Чтобы было понятно, насколько важен подобный резонансный максимум, приведем только один пример. Созданные лазерные часы дают сбой в 1 секунду при их непрерывной работе в течение 1 млрд лет. Отвлекаясь, скажем, что были разработаны очень интересные методы и техника **экспериментального** нахождения точности работы часов.

Таким образом, для грамотного и обоснованного **построения графика функции** предварительно **необходимо** эту функцию **исследовать**. На примере покажем, какие **этапы** необходимо пройти **при исследовании функции и построении ее графика.**

Пример 2

Исследуем функцию $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ и построим ее график.

1. **Найдем область определения функции.** Так как знаменатель x^2+1 дроби не обращается в нуль, то $D(y)$ – вся числовая прямая.

2. **Определим особенности функции.** Очевидно, что данная функция четная. Действительно, $y(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=y(x)$. Поэтому исследуем и построим график функции при $x \geq 0$. Затем эту часть графика отразим влево относительно оси ординат.

3. **Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.** Чтобы найти точку пересечения с осью ординат, положим $x = 0$ и получим $y = -1$. Точка пересечения с осью ординат $(0; -1)$. Чтобы найти точку пересечения с осью абсцисс, положим $y = 0$ и получим уравнение $0=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ или $0 = x^2 - 1$, откуда $x = 1$. Точка пересечения с осью абсцисс $(1; 0)$.

4. **Выясним промежутки знакопостоянства функции**, то есть на каких промежутках функция принимает положительные значения, а на каких – отрицательные значения. Для нахождения промежутка отрицательности функции решим неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2+2}<0$ или $x^2 - 1 < 0$, откуда $0 \leq x < 1$. Для нахождения промежутка положительности функции решим неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2+2}>0$ или $x^2 - 1 > 0$, откуда $x > 1$.

5. **Определим монотонность функции.** Пусть x_2 и x_1 – две точки из промежутка $[0; \infty)$, причем $x_2 > x_1$. Запишем функцию в виде

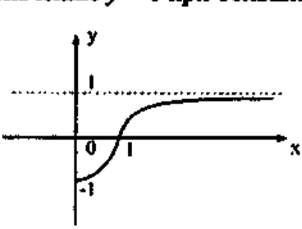
$y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=\dfrac{(x^2+1)-2}{x^2+1}=1-\dfrac{2}{x^2+1}$. Найдем разность $y(x_2)-y(x_1)=$
$=\left(1-\dfrac{2}{x_2^2+1}\right)-\left(1-\dfrac{2}{x_1^2+1}\right)=\dfrac{2}{x_1^2+1}-\dfrac{2}{x_2^2+1}=\dfrac{2(x_2-x_1)(x_2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$. В этой дроби знаменатель всегда положительный. В числителе: множитель $x_2-x_1>0$ (так как $x_2>x_1$), $x_2+1>0$ (так как $x_2>0$). Следовательно, дробь положительна, так как $y(x_2)-y(x_1)>0$ или $y(x_2)>y(x_1)$. Поэтому функция $y(x)$ возрастает на промежутке $[0;\infty)$. Учитывая четность функции $y(x)$, на промежутке $(-\infty;0]$ она убывает.

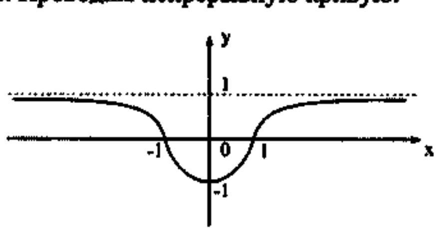
6. **Найдем экстремумы функции.** Так как только в точке $x=0$ убывание функции сменяется возрастанием, то точка минимума $x_{\min}=0$ и минимум функции $y_{\min}=-1$.

7. **Выясним поведение функции при больших значениях x.** Данная функция имеет вид $y=1-\dfrac{2}{x^2+1}$. При неограниченном возрастании x знаменатель дроби x^2+1 также неограниченно возрастает. Поэтому значения дроби $\dfrac{2}{x^2+1}$ приближаются к нулю, оставаясь положительными. Следовательно, значения функции $y(x)$ неограниченно приближаются к 1, оставаясь меньше 1. Поэтому прямая $y=1$ является **горизонтальной асимптотой** функции $y(x)$.

Исследованные свойства функции $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ позволяют построить ее график. Сделаем сначала такое построение для промежутка $x\in[0;\infty)$.

Построим точки пересечения с осями координат $(0;-1)$, $(1;0)$. Учтем, что на промежутке $[0;1)$ значения $y<0$, на промежутке $(1;\infty)$ значения $y>0$. Значения функции возрастают от $y=-1$ и стремятся к значению $y=1$ при больших x. Проводим непрерывную кривую.





Учитывая четность данной функции $y(x)$, отражаем кривую, построенную при $x\ge 0$, влево симметрично относительно оси ординат. Получаем график функции $y(x)$.

Схема исследования функции

На рассмотренном примере были фактически отработаны все этапы такого **исследования**. Они сводятся к следующему:

1. Найти области определения и значений функции $y(x)$.

2. Выяснить особенности функции, облегчающие ее исследование и построение графика: а) четность или нечетность; б) периодичность.

3. Вычислить координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции.

5. Определить промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

6. Найти точки экстремума, определить вид экстремума (максимум или минимум), вычислить экстремум функции.

7. Исследовать поведение функции в окрестности точек разрыва (как правило, возникают вертикальные асимптоты) и при больших по модулю значениях аргумента (могут возникать горизонтальные или наклонные асимптоты).

Заметим, что этот план носит **ориентировочный характер**. Практически любой пункт плана может вызвать **технические трудности**. Например, даже в пункте 1 при нахождении области определения и значений данной функции $f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ – рациональная, то есть имеет вид $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ (где $h(x)$, $g(x)$ – некоторые многочлены). Тогда область определения функции $f(x)$ задается условием $g(x) \neq 0$. Поэтому необходимо найти корни многочлена $g(x)$. Если этот многочлен имеет степень выше второй и иррациональные корни, то такая задача практически **нерешаема**. Нахождение **области значений** функции $f(x)$ **является еще более тяжелой задачей**. Для этого необходимо найти **промежутки монотонности** функции $f(x)$, ее **экстремумы**, исследовать **поведение функции** $f(x)$ **при больших значениях** $|x|$. Эти процедуры можно выполнить только с помощью теории **предела функции**, которая изучается в школе в очень урезанном объеме (см. следующую главу).

Остановимся на понятии **асимптоты графика функции** $f(x)$. Асимптоты разделяются на два вида: **вертикальные** и **наклонные** (в частности, **горизонтальные**). Строгое определение асимптот может быть дано только с помощью теории **предела функции**. Поэтому ограничимся только **понятием асимптот**.

Вертикальная **прямая** $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** функции $f(x)$, если **при приближении** значений x **к величине** a

значения функции $f(x)$ неограниченно возрастают или убывают, то есть при $x \to a$ $f(x) \to \pm\infty$.

Пример 3

Рассмотрим функцию $y(x) = \dfrac{1}{x-2}$ и построим ее график.

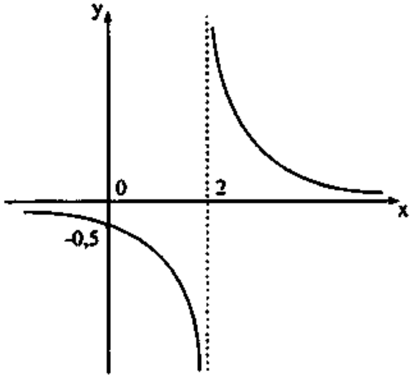
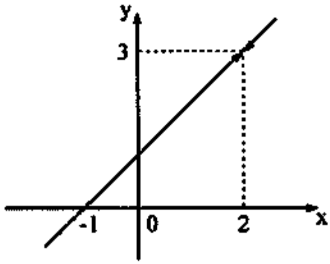


График данной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ его смещением на 2 единицы вправо. Видно, что при $x \to 2$ (при этом $x < 2$) знаменатель $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ неограниченно убывают, то есть $y \to -\infty$. При $x \to 2$ (при этом $x > 2$) знаменатель $x - 2$ положительный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ неограниченно возрастают, то есть $y \to \infty$. Следовательно, вертикальная прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой данной функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Из примера видно, что часто **в случае рациональных функций** вертикальными **асимптотами** являются те **значения** x, **при которых знаменатель дроби обращается в ноль.** Однако, **не всегда в** случае рациональных функций **возникают вертикальные асимптоты** (даже если знаменатель дроби обращается в ноль).

Пример 4

Построим график функции $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$.

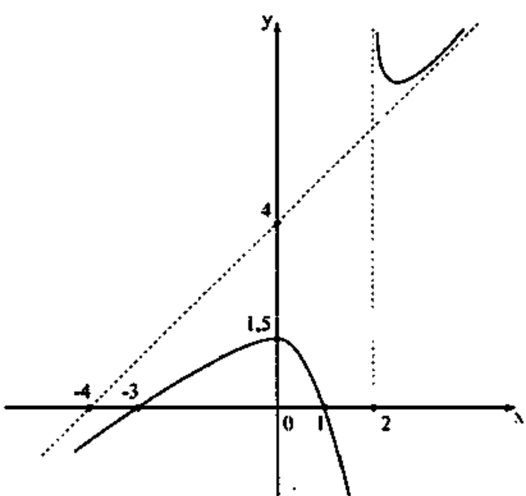


Разложим числитель данной дроби на множитель и сократим ее. Получаем $y = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1$ (при этом $x \neq 2$). Видно, что при $x \to 2$ значения функции $y \to 3$. Поэтому данная функция вертикальной асимптоты не имеет. Существует только значение $x = 2$, при котором функция не определена.

Обратимся теперь к понятию **наклонной асимптоты. Прямая** $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** функции $f(x)$, если **при неограниченном возрастании или убывании** x **значения функции** $f(x)$ **стремятся к значениям** линейной **функции** $y(x)$, то есть при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to y(x)$.

Пример 5

Построим график функции $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$.



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ находим $y = \frac{-3}{-2} = 1{,}5$ – точка пересечения с осью ординат.

При $y = 0$ получаем уравнение $0 = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ или $0 = x^2 + 2x - 3$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ – точки пересечения с осью абсцисс.

Очевидно, что прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота. При $x \to 2$ числитель дроби $x^2 + 2x - 3 \to 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$. При $x < 2$ знаменатель дроби $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to -\infty$. При $x > 2$ знаменатель дроби $x - 2$ положительный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to \infty$.

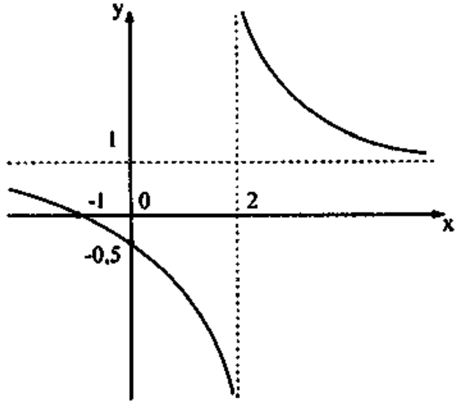
Разделим числитель дроби $x^2 + 2x - 3$ на ее знаменатель $x - 2$ столбиком и выделим целую часть. Тогда функция $y(x)$ имеет вид $y = x + 4 + \frac{5}{x - 2}$. Очевидно, при $x \to \infty$ дробь $\frac{5}{x - 2} \to 0$ и значения функции $y(x)$ стремятся к значениям линейной функции $y = x + 4$. Поэтому линейная функция $y = x + 4$ является **наклонной асимптотой** для данной функции $y(x)$.

Учитывая точки пересечения графика функции с осями координат, наличие вертикальной и наклонной асимптот, строим график данной функции. Очевидно, что график функции не пересекает асимптоты. Из эскиза графика видно, что функция имеет максимум и минимум (найти их координаты можно только с помощью производной).

Частным случаем наклонной асимптоты является **горизонтальная асимптота** (при $k = 0$). **Горизонтальная прямая $y = b$** называется **горизонтальной асимптотой** функции $f(x)$, если **при неограниченном возрастании или убывании x значения функции $f(x)$ стремятся к величине b**, то есть при $x \to \infty$ $f(x) \to b$.

Пример 6

Построим график функции $y = \frac{x + 1}{x - 2}$.



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ находим $y = -0{,}5$ – точка пересечения с осью ординат. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = \dfrac{x+1}{x-2}$ или $0 = x + 1$, корень которого $x = -1$ – точка пересечения с осью абсцисс.

Очевидно, что прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота. При $x \to 2$ числитель дроби $x + 1 \to 3$. При $x < 2$ знаменатель дроби $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to -\infty$. При $x > 2$ знаменатель дроби $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to \infty$.

Разделим числитель дроби $x + 1$ на ее знаменатель $x - 2$ столбиком и выделим целую часть. Тогда функция $y(x)$ имеет вид $y = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Очевидно, при $x \to \infty$ дробь $\dfrac{3}{x-2} \to 0$ и значения функции $y(x)$ стремятся к 1. Поэтому прямая $y = 1$ является **горизонтальной асимптотой** для графика данной функции $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

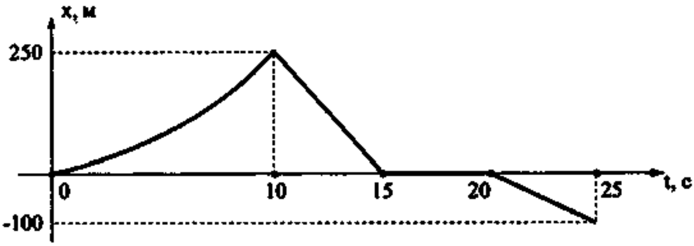
Учитывая проведенное исследование данной функции, строим ее график. Очевидно, что такой график получается смещением графика функции $y = \dfrac{3}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх.

Чтение графиков функций

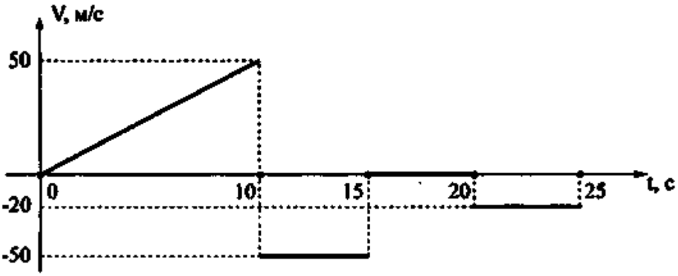
Практически во всех исследованиях результаты представляются в виде графиков. Поэтому необходимо уметь их читать, то есть понимать и представлять свойства функций, которые им соответствуют.

Пример 7

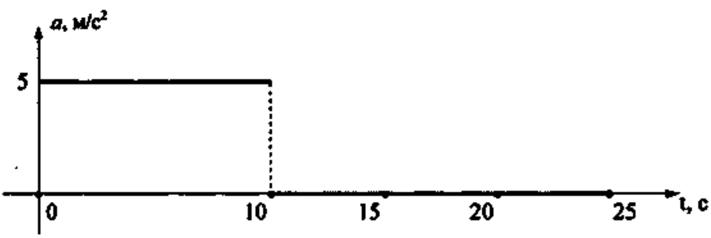
На рис. а представлена зависимость $x(t)$ для точки, двигающейся из пункта A в пункт B (где x – координата точки, начало отсчета совмещено с пунктом A).



а)



б)



в)

Опишем происходящее движение, которое дополнительно будем иллюстрировать графиками б) – зависимостью скорости от времени $V(t)$ и в) – зависимостью ускорения от времени $a(t)$. При этом координата (перемещение) x измеряется в м, скорость V – в м/с, ускорение a – в м/с^2, время t – в с.

На промежутке 0–10 с перемещение x меняется по квадратичному закону, то есть движение является равноускоренным. Поэтому скорость V меняется по линейному закону и ускорение a постоянно. При этом точка движется по направлению от A к B, так как перемещение x имеет положительный знак.

При $t = 10$ с точка изменяет направление движения на противоположное и начинает двигаться к пункту A. При этом координата x меняется по линейному закону, то есть движение является равномерным со скоростью $V = -50$ м/с. Отрицательный знак скорости при $t = 10$–15 с указывает на движение в направлении к пункту A. Очевидно, что ускорение $a = 0$.

В течение времени $t = 15$–20 с координата x не меняется и $x = 0$. Это означает, что точка находится в состоянии покоя в пункте A. Разумеется, скорость $V = 0$ и ускорение $a = 0$.

На промежутке 20–25 с координата x меняется по линейному закону, то есть движение является равномерным со скоростью $V = -20$ м/с. Отрицательные знаки перемещения x и скорости V указывают на удаление точки от пунктов A и B. Разумеется, ускорение $a = 0$.

IV. Задание на уроке

№ 93 (а, б); 94 (а, г); 95 (а, б); 96 (а); 97 (в); 98 (а, г); 99 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Приведите схему исследования функции.
2. Дайте определение вертикальной асимптоты графика функции.
3. Приведите определение наклонной асимптоты графика функции.
4. Дайте определение горизонтальной асимптоты графика функции.

VI. Задание на дом

№ 93 (в, г); 94 (б, в); 95 (в, г); 96 (в); 97 (а); 98 (б, в); 99 (в, г).

VII. Творческие задания

Проведите исследование функции и постройте ее график:

1) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{x-3}{x-1}$; 3) $y = \dfrac{1-x}{x+2}$;

4) $y = \dfrac{x-3}{2-x}$; 5) $y = \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$; 6) $y = \dfrac{1-x}{x^2-4x+3}$;

7) $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$; 8) $y = \dfrac{1-x}{x^2-9}$; 9) $y = \dfrac{x-2}{x^2+2x+3}$;

10) $y = \dfrac{3-x}{x^2+3x+4}$; 11) $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$; 12) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{1-x}$;

13) $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$; 14) $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 32–33. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания

Цель: вспомнить основные свойства тригонометрических функций и использовать их для решения задач.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Провести исследование функции и построить ее график:

а) $y = 4x - x^2$; б) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

Вариант 2

Провести исследование функции и построить ее график:

а) $y = x^2 + 6x$; б) $y = \dfrac{1-x}{x+2}$.

III. Изучение нового материала

Тригонометрические функции и их свойства

Из представленных ранее графиков основных тригонометрических функций просматриваются их свойства. Тем не менее учащимся полезно ознакомиться с таблицей свойств тригонометрических функций, приведенной в учебнике. Запомнить эту таблицу тяжело, да это и не нужно. Поэтому для лучшего понимания и повторения свойств функций рассмотрим наиболее типичные задачи.

Пример 1

Найти область определения функции $y = \dfrac{3\cos 2x + 1}{1 - \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Область определения функции задается условием $1 - \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$ или $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 1$. Решим соответствующее уравнение. Обозначим $z = 3x - \dfrac{\pi}{3}$ и получим уравнение $\sin z = 1$.

Используя единичную окружность, найдем его решения $z=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ (где $n\in Z$). Вернемся к старой переменной x и получим линейное уравнение $3x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n$. Таким образом, область определения функции – все x, кроме чисел $\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n$ (где $n\in Z$).

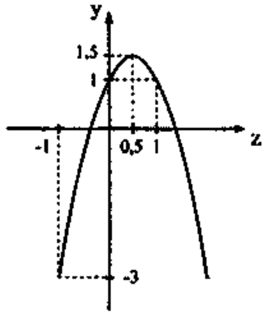
Пример 2

Определить область значений функции:

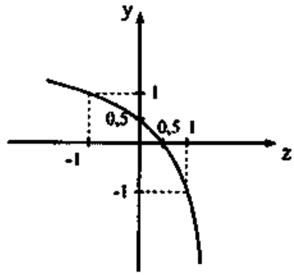
а) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$; б) $y=2\cos^2 x+2\sin x-1$; в) $y=\frac{2\cos x-1}{\cos x-2}$.

а) Преобразуем данную функцию. Для этого правую часть равенства умножим и разделим на 2 и получим $y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$. Учтем, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ и $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, и запишем равенство в виде $y=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$. С учетом формулы синуса разности двух углов запишем $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. Обозначим аргумент $z=x-\frac{\pi}{6}$ и получим функцию $y=2\sin z$, где $z\in R$. Так как функция синус ограничена, то $-1\le\sin z\le 1$ и $-2\le 2\sin z\le 2$, то есть $-2\le y\le 2$. Поэтому область значений функции $E(y)=[-2; 2]$.

б) Используя основное тригонометрическое тождество, запишем функцию в виде $y=2(1-\sin^2 x)+2\sin x-1$ или $y=-2\sin^2 x+2\sin x+1$. Обозначим $z=\sin x$ (где $-1\le z\le 1$) и получим $y=-2z^2+2z+1$. Поэтому надо найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(z)=-2z^2+2z+1$ на отрезке $z\in[-1;1]$. Графиком функции $y(z)$ является парабола, направленная ветвями вниз. Координаты вершины параболы $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $y(-1)=-3$ и $y(1)=1$. Видно, что на отрезке $[-1, 1]$ наименьшее значение функции $y(z)$ равно -3, наибольшее – равно 1,5. Итак, область значений функции $E(y)=[-3; 1{,}5]$.



в) Обозначим $z = \cos x$ (где $-1 \le z \le 1$) и запишем функцию в виде $y = \dfrac{2z-1}{z-2}$. Построим график этой функции (гипербола). На рисунке изображен фрагмент этого графика. Видно, что функция является убывающей. Поэтому наименьшее значение функции $y(z)$ равно -1, наибольшее равно 1, то есть $-1 \le y \le 1$. Итак, область значений данной функции $E(y) = [-1;\ 1]$.



Пример 3

Найти область определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}$; б) $y = \sqrt{1 - 2\sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$.

а) Область определения функции задается условиями $\sin x \ge 0$, $\cos x \ne 0$. Учитывая основное тригонометрическое тождество, запишем эти условия в виде $0 \le \sin x < 1$. Используя единичную окружность, найдем решения этого неравенства $\left[2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$. Область определения $D(y) = \left[2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

б) Область определения функции задается условием $1-2\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$. Используя тригонометрические формулы, преобразуем левую часть неравенства. С помощью основного тригонометрического тождества получаем: $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-$ $-2\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$ или $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$. Используя формулу для косинуса двойного угла, запишем неравенство в виде $\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)\ge 0$. Обозначим $z=4x-\frac{2\pi}{3}$ и решим неравенство $\cos z\ge 0$. С помощью единичной окружности находим $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le z\le\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in Z$. Вернемся к старой переменной x и получим неравенство $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 4x-\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 4x\le\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ и $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n\le x\le\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n$. Поэтому область определения функции $D(y)=\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n;\ \frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n\right]$, где $n\in Z$.

Пример 4

Упорядочить числа, $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 5$.

Учтем, что функция косинус убывает на промежутке $[0;\ \pi]$. Числа 1, 2, 3 принадлежат этому промежутку. Так как функция косинус четная и ее период равен 2π, то получаем $\cos 4=\cos(2\pi-4)$ и $\cos 5=\cos(2\pi-5)$. Теперь аргументы $2\pi-4$ и $2\pi-5$ также принадлежат промежутку $[0;\ \pi]$. Упорядочивая числа 1, 2, 3, $2\pi-4$ и $2\pi-5$, получаем неравенство $1<2\pi-5<2<2\pi-$ $-4<3$, откуда $\cos 1>\cos(2\pi-5)>\cos 2>\cos(2\pi-4)>\cos 3$ или $\cos 3<\cos 4<\cos 2<\cos 5<\cos 1$.

Пример 5

Найти точки минимума и максимума функции $y=3-64\cos 4x\cos 2x\cos x\sin x$.

Используя формулу для синуса двойного угла преобразуем последнее слагаемое: $64\cos 4x\cos 2x\cos x\sin x=32(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x=$ $=16(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x=8(2\sin 4x\cos 4x)=8\sin 8x$. Тогда функция имеет вид $y = 3 - 8\sin 8x$. Так как $-1 \le \sin 8x \le 1$, то $8 \ge -8\sin 8x \ge -8$ и $11 \ge 3 - 8\sin 8x \ge -5$, то есть $-5 \le y \le 11$. Таким образом, $y_{\min} = -5$. Минимум функции достигается при условии $\sin 8x = 1$, откуда $8x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in Z$) и $x_{\min} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n$. Максимум функции $y_{\max} = 11$ и достигается при условии $\sin 8x = -1$, откуда $8x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x_{\max} = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n$.

Гармонические колебания

Величины, которые изменяются по законам $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ или $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, играют **важную роль в науке и технике.** По такому закону меняется координата шарика, закрепленного на пружине; сила тока и напряжение переменного тока; интенсивность электромагнитной волны (в частности, света) и т. д.

Фактически эти два закона являются одним и тем же. Используя формулу приведения и четность функции косинус, получаем
$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\omega t + \varphi)\right) = A\cos\left(\omega t + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = A\cos(\omega t + \overline{\varphi}),$$
где $\overline{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно считать, что рассматриваемые процессы подчиняются закону $A\cos(\omega t + \varphi)$. Для физической интерпретации этого закона будем рассматривать шарик, закрепленный на пружине. Из физики известно, что шарик совершает **гармонические колебания**. Очевидно, что параметры A, ω и φ полностью определяют колебания. Эти параметры носят **специальные названия**: A – **амплитуда** колебаний; ω – циклическая (круговая) **частота** колебаний; φ – **начальная фаза** колебаний (обычно выбирают $\varphi \in [0; 2\pi)$).

Период рассматриваемой функции $T = \frac{2\pi}{\omega}$ называют **периодом** колебания.

Пример 6

Укажите основные характеристики колебания:

а) $y = 2\sqrt{3}\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 5\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2(\sin 4t - \cos 4t)$.

Для нахождения таких параметров приведем функции к виду $A\cos(\omega t + \varphi)$.

а) Учтем периодичность функции косинус и получим $y = 2\sqrt{3}\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(4t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 2\sqrt{3}\cos\left(4t + \frac{5\pi}{3}\right)$. Теперь определяем $A = 2\sqrt{3}$, $\omega = 4$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ и $T = \frac{\pi}{2}$.

б) Используем формулу приведения, четность и периодичность функции косинус и получим $y = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3t\right) = 5\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 5\cos\left(3t - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 5\cos\left(3t + \frac{7\pi}{4}\right)$. Теперь находим $A = 5, \omega = 3, \varphi = \frac{7\pi}{4}$ и $T = \frac{2\pi}{3}$.

в) Умножим и разделим правую часть равенства на $\sqrt{2}$ и получим $y = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4t\right)$. Учтем, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ и формулу синуса разности двух углов. Получаем: $y = 2\sqrt{2}\left(\sin 4t\cos\frac{\pi}{4} - \cos 4t\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$. Используем формулу приведения, четность и периодичность функции косинус. Имеем: $y = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(4t - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 4t\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(4t + \frac{5\pi}{4}\right)$. Определяем: $A = 2\sqrt{2}$, $\omega = 4$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ и $T = \frac{\pi}{2}$.

Функции $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ и $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ при $A = 1, \omega = 1$ и $\varphi = 0$ переходят в простейшие тригонометрические функции $y = \cos t$ и $y = \sin t$.

IV. Задание на уроке

№ 100 (а); 101 (г); 102 (а); 103 (г); 104 (в); 105 (а); 107 (а); 109 (а, б); 110 (г); 111 (в); 113 (а, г); 114 (б); 115 (а, г).

V. Задание на дом

№ 100 (б); 101 (а); 102 (в); 103 (а); 104 (б); 105 (в); 107 (г); 109 (в, г); 110 (б); 111 (г); 113 (б, в); 114 (в); 115 (б, в).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 34–35. Контрольная работа по теме «Тригонометрические функции и их свойства»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

Вариант 1

1. Дана функция $y = 3 - 2\sin x$. Найдите для нее:

а) область определения;

б) область значений.

2. Для функции $y = -5\cos 4x$ определите:

а) четность или нечетность (ответ обоснуйте);

б) наименьший положительный период.

3. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $|y| = \sin x$.

Вариант 2

1. Дана функция $y = 5 - 4\cos x$. Найдите для нее:

а) область определения;

б) область значений.

2. Для функции $y = 2\sin 3x$ определите:

а) четность или нечетность (ответ обоснуйте);

б) наименьший положительный период.

3. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = \operatorname{ctg} x$; б) $|y| = \cos x$.

Вариант 3

1. Определите четность или нечетность функции $y = x^2 \sin 2x + x^3 \cos 6x$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \sin x + \cos x + 2$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 2\sin x + 3\cos 2x - 1$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 2\operatorname{ctg}|x|$; б) $\sin y = \sin x$.

Вариант 4

1. Определите четность или нечетность функции $y = x^2 \cos 3x - x\sin 5x$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \cos x - \sin x - 3$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\cos x - 4\sin 2x + 1$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) + \cos 3x$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 2\operatorname{tg}|x|$; б) $\cos y = \cos x$.

Вариант 5

1. Определите четность или нечетность функции $y = 3x\cos 4x + x^3 \operatorname{tg}|2x|$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x - 1$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\operatorname{tg} 2x - \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{5}\cos 3x$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = 2\sin x - 3\cos^2 x + 1$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 2\,\mathrm{tg}(x + |x|)$; б) $\sin(|x| + 2|y|) = 0$.

Вариант 6

1. Определите четность или нечетность функции $y = 2x^3 \sin|x| + x|\mathrm{ctg}\, x|$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x - 2$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 2\,\mathrm{ctg} 3x - \sqrt{7}\cos x - 2\sqrt{3}\sin 2x$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = 3\cos x + 2\sin^2 x - 1$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 3\cos(x + |x|)$; б) $\mathrm{tg}(2|x| + |y|) = 0$.

Урок 36. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. а) *Ответ*: $D(y) = R$;

 б) *Ответ*: $E(y) = [1; 5]$.

2. а) *Ответ*: функция четная;

 б) *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}$.

3. а) *Ответ*: функция нечетная и возрастающая;

 б) *Ответ*: график симметричен относительно оси абсцисс.

Вариант 2

1. а) *Ответ*: $D(y) = R$;

 б) *Ответ*: $E(y) = [1; 9]$.

2. а) *Ответ*: функция нечетная;

 б) *Ответ*: $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. а) *Ответ*: функция нечетная и убывающая;

 б) *Ответ*: график симметричен относительно оси абсцисс.

Вариант 3

1. *Ответ*: нечетная.

2. *Ответ*: $D(y) = R,\ E(y) = \left[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right]$.

3. *Ответ*: 2π.

4. *Ответ*: $y_{\min} = -1, y_{\max} = 1$.

5. а) *Ответ*: график симметричен относительно оси ординат;

 б) *Ответ*: семейство прямых $y = x + 2\pi n$ и $y = -x + \pi(2n+1)$, где $n \in Z$.

Вариант 4

1. *Ответ*: четная.

2. *Ответ*: $D(y) = R,\ E(y) = [-3-\sqrt{2}; -3+\sqrt{2}]$.

3. *Ответ*: 2π.

4. *Ответ*: $y_{min} = -\sqrt{3}$, $y_{max} = \sqrt{3}$.

5. а) *Ответ*: график симметричен относительно оси ординат;

б) *Ответ*: семейство прямых $y = x + 2\pi n$ и $y = -x + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Решения

Вариант 5

1. Найдем $y(-x) = 3(-x)\cos(-4x) + (-x)^3 \operatorname{tg}|-2x| = -3x\cos 4x - x^3\operatorname{tg}|2x| = -(3x\cos 4x + x^3\operatorname{tg}|2x|) = -y(x)$. Было учтено, что функция косинус четная и $|-2x| = |2x|$. Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ нечетная по определению.

Ответ: нечетная.

2. Используя метод введения вспомогательного угла, получим: $y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\right) - 1 = 2\left(\sin 3x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos 3x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$. Так как $-1 \le \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1$, то $-2 \le 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le 2$ и $-3 \le 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \le 1$, то есть $-3 \le y \le 1$ и $E(y) = [-3; 1]$. Очевидно, $D(y) = R$.

Ответ: $E(y) = [-3; 1]$, $D(y) = R$.

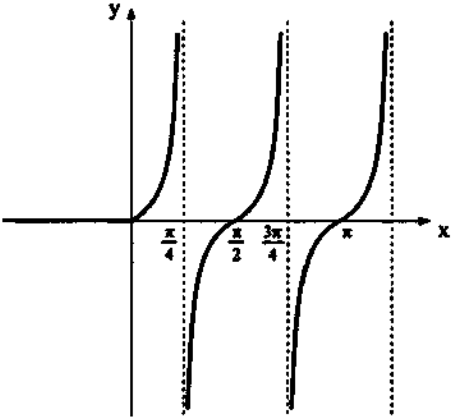
3. Найдем периоды функций, входящих в функцию $y(x)$. Получаем: для функции $\operatorname{tg} 2x - T_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$, для функции $\sin x - T_2 = 2\pi = \frac{12\pi}{6}$, для функции $\cos 3x - T_3 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$. НОК $(T_1, T_2, T_3) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$. Поэтому период функции $y(x)$ равен $T = 2\pi$.

Ответ: 2π.

4. Запишем данную функцию в виде $y = 2\sin x - 3(1 - \sin^2 x) + 1 = 3\sin^2 x + 2\sin x - 2$. Обозначим $t = \sin x$ (где $-1 \le t \le 1$) и получим $y = 3t^2 + 2t - 2$. Наименьшее значение функции достигается при $t = -\frac{1}{3}$ и равно $y_{min} = 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 2 = -2\frac{1}{3}$, наибольшее значение достигается при $t = 1$ и равно $y_{max} = 3 + 2 - 2 = 3$.

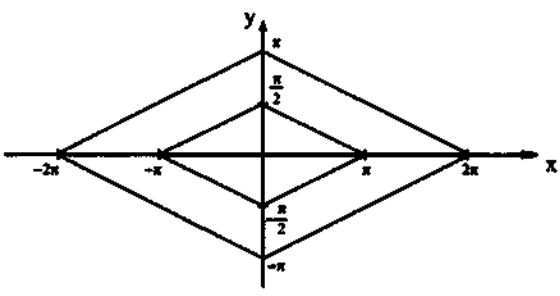
Ответ: $y_{min} = -2\frac{1}{3}$, $y_{max} = 3$.

5. Для данной функции раскроем знак модуля и получим $\begin{cases} 0, \text{ если } x < 0 \\ 2\operatorname{tg} 2x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$. Построим график этой функции. Учтем, что график функции $y = 2\operatorname{tg}2x$ получается из графика $y = \operatorname{tg}x$ растяжением в 2 раза вдоль оси ординат и сжатием в 2 раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

6. Выпишем решения уравнения $\sin(|x| + 2|y|) = 0$ и получим $|x| + 2|y| = \pi n$ (где $n \in Z$ и $n \geq 0$). При $n = 0$ получаем $x = y = 0$ (начало координат), при $n = 1$ имеем график уравнения $|x| + 2|y| = \pi$, при $n = 2$ получаем график уравнения $|x| + 2|y| = 2\pi$. Строим графики таких уравнений. Графиком данного уравнения является точка, находящаяся в начале координат, и вложенные друг в друга ромбы, стороны которых отличаются в 2 раза.



Ответ: см. график.

Вариант 6

1. Найдем $y(-x) = 2(-x)^3 \sin|-x| - x|\mathrm{ctg}(-x)| = -2x^3 \sin|x| - x|\mathrm{ctg}\, x| = -(2x^3 \sin|x| + x|\mathrm{ctg}\, x|) = -y(x)$. Было учтено, что функция котангенс нечетная и $|-x| = |x|$. Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ нечетная по определению.

Ответ: нечетная.

2. Используя метод введения вспомогательного угла, получим:
$$y = 2\left(\frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x\right) - 2 = 2\left(\sin 5x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos 5x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) - 2 =$$
$= 2\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$. Так как $-1 \le \sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1$, то $-2 \le 2\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 2$ и $-4 \le 2\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2 \le 0$, то есть $-4 \le y \le 0$ и $E(y) = [-4;\ 0]$. Очевидно, $D(y) = R$.

Ответ: $E(y) = [-4;\ 0]$, $D(y) = R$.

3. Найдем периоды функций, входящих в функцию $y(x)$. Получаем: для функции $\mathrm{ctg}\, 3x - T_1 = \dfrac{\pi}{3}$, для функции $\cos x - T_2 = 2\pi = \dfrac{6\pi}{3}$, для функции $\sin 2x - T_3 = \pi = \dfrac{3\pi}{3}$. НОК $(T_1, T_2, T_3) = \dfrac{6\pi}{3} = 2\pi$. Поэтому период функции $y(x)$ равен $T = 2\pi$.

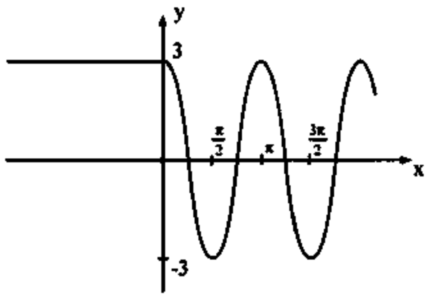
Ответ: 2π.

4. Запишем данную функцию в виде $y = 3\cos x + 2(1 - \cos^2 x) - 1 = -2\cos^2 x + 3\cos x + 1$. Обозначим $t = \cos x$ (где $-1 \le t \le 1$) и получим $y = -2t^2 + 3t + 1$. Наибольшее значение функции достигается при $t = \dfrac{3}{4}$ и равно $y_{max} = -2 \cdot \dfrac{9}{16} + 3 \cdot \dfrac{3}{4} + 1 = 2\dfrac{1}{8}$, наименьшее значение достигается при $t = -1$ и равно $y_{min} = -2 - 3 + 1 = -4$.

Ответ: $y_{min} = -4$, $y_{max} = 2\dfrac{1}{8}$.

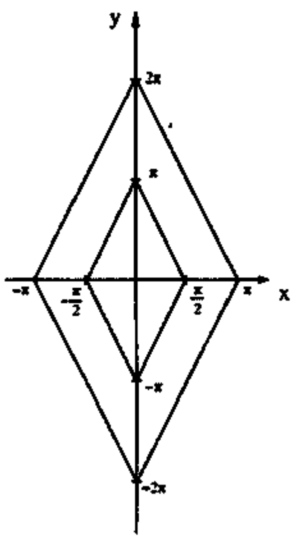
5. Для данной функции раскроем знак модуля и получим $\begin{cases} 3, \text{ если } x < 0 \\ 3\cos 2x, \text{ если } x \ge 0 \end{cases}$. Построим график этой функции. Учтем, что график функции $y = 3\cos 2x$ получается из графика $y = \cos x \cdot$ рас-

тяжением в 3 раза вдоль оси ординат и сжатием в 2 раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

6. Выпишем решения уравнения $\operatorname{tg}(2|x|+|y|)=0$ и получим $2|x|+|y|=\pi n$ (где $n \in Z$ и $n \geq 0$). При $n = 0$ получаем $x = y = 0$ (начало координат), при $n = 1$ имеем график уравнения $2|x|+|y|=\pi$, при $n = 2$ получаем график уравнения $2|x|+|y|=2\pi$. Строим графики таких уравнений. Графиком данного уравнения является точка, находящаяся в начале координат, и вложенные друг в друга ромбы, стороны которых отличаются в 2 раза.



Ответ: см. график.

§ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

Уроки 37–39. Обратные тригонометрические функции

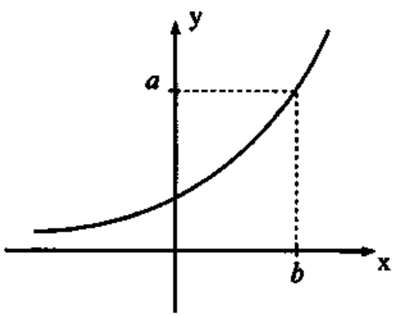
Цель: рассмотреть обратные тригонометрические функции, их основные свойства и графики.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Прежде всего рассмотрим **теорему о корне уравнения**, которая используется при решении уравнений: если функция $f(x)$ **монотонна** (то есть возрастает или убывает) на промежутке I и **число** a **– любое из значений, принимаемых** $f(x)$ **на этом промежутке**, то **уравнение** $f(x) = a$ **имеет единственный корень** в промежутке I (см. рис.).



Докажем это утверждение. Рассмотрим, например, возрастающую функцию $f(x)$. По условию в промежутке I существует такое число b, что $f(b) = a$. Покажем, что b – единственный корень уравнения $f(x) = a$. Предположим, что на промежутке I есть еще число c (причем $c \neq b$), такое, что $f(c) = a$. Но если $c \neq b$, то или $c < b$ или $c > b$. Но тогда в силу возрастания функции $f(x)$ получаем либо $f(c) < f(b)$ либо $f(c) > f(b)$. Поэтому равенство $f(c) = f(b) = a$ не выполняется. Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке I нет других корней уравнения $f(x) = a$, кроме числа b.

Пример 1

Решим уравнение $2x^5 + 3x = 5$.

Функция $f(x) = 2x^5 + 3x$ представляет собой сумму двух возрастающих функций $2x^5$ и $3x$, определенных на R. Поэтому функция $f(x)$ определена и возрастает на R. Поэтому уравнение $f(x) = 5$ имеет не более одного корня. Легко догадаться, что таким корнем является число $x = 1$.

До сих пор рассматривались только **тригонометрические функции и по значению угла находилось значение функции.** При решении простейших тригонометрических уравнений возникает необходимость введения **обратных тригонометрических функций.**

Очень часто возникает обратная задача – определение величины угла по известному значению его тригонометрической функции. Такая задача является многозначной: существует бесчисленное множество углов, тригонометрические функции которых равны одному и тому же значению. Поэтому исходя из **монотонности** тригонометрических **функций, для однозначного определения углов вводят** следующие **обратные тригонометрические функции.**

Арксинус числа a ($\arcsin a$) – такой угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, то есть $\alpha = \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin\alpha = a$.

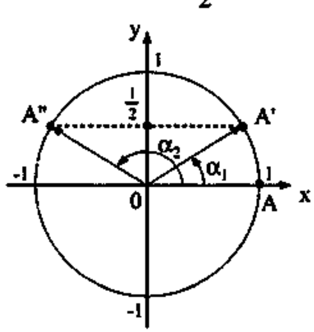
Арккосинус числа a ($\arccos a$) – такой угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, то есть $\alpha = \arccos a \in [0; \pi]$; $\cos\alpha = a$.

Арктангенс числа a ($\operatorname{arctg} a$) – такой угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, то есть $\alpha = \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Арккотангенс числа a ($\operatorname{arcctg} a$) – такой угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a, то есть $\alpha = \operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$; $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

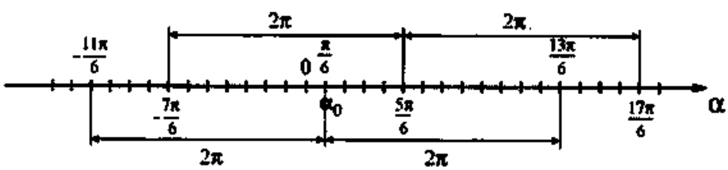
Пример 2

Построить такой угол α, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Найти $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{2}$.

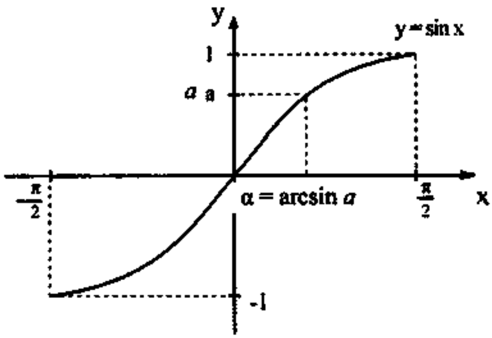


Рассмотрим единичную окружность и построим прямую $y=\frac{1}{2}$ до ее пересечения с окружностью в точках A' и A''. Очевидно, что условию удовлетворяют углы $\alpha_1=\frac{\pi}{6}$ и $\alpha_2=\frac{5\pi}{6}$ (α_2 находим с учетом, что $\alpha_1+\alpha_2=\pi$) или отличающиеся от них на целое число оборотов: $\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\alpha=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$ (n; $k=0$; ±1; ±2 ...). Эти две серии углов удобно записать в более компактном виде $\alpha=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m$ ($m=0$; ±1; ±2 ...).

Очевидно, что из всех углов α только угол $\alpha_1\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\alpha_0=\arcsin\frac{1}{2}=\alpha_1=\frac{\pi}{6}$ и все углы, удовлетворяющие условию задачи, могут быть представлены в виде: $\alpha=(-1)^m\arcsin\frac{1}{2}+\pi m=(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+\pi m$. Для наглядности удобно изобразить эти углы на числовой оси.



Заметим, что на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция синус возрастает (то есть монотонна) и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому **по теореме о корне** для любого числа a (такое, что $|a|\le1$) в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ существует **единственный корень** α уравнения $\sin\alpha=a$. Это число α называют арксинусом числа a.



Учитывая комментарии к рассмотренному примеру, аналогично вводятся и другие обратные тригонометрические функции.

Пример 3

Найдем:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; г) $\mathrm{arcctg}(-1)$.

Учитывая определения обратных тригонометрических функций, получаем:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, так как $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3}\in[0;\pi]$;

в) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, так как $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\mathrm{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, так как $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$ и $\frac{3\pi}{4}\in(0;\pi)$.

Пример 4

Вычислим $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Пусть угол $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$, тогда по определению $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, надо найти $\cos\alpha$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$. Учтено, что $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos\alpha\ge 0$. Итак, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$.

Пример 5

Найдем $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Обозначим $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$, тогда по определению $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Найдем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (учтено, что $\cos\alpha\ge 0$). Аналогично обозначим $\beta=\arccos\frac{2}{3}$, тогда $\cos\beta=\frac{2}{3}$ и $\alpha\in[0;\pi]$. Вычислим $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (учтено, что $\sin\beta\ge 0$).

Надо найти $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+$ $+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2(1+\sqrt{10})}{9}$.

Пример 6

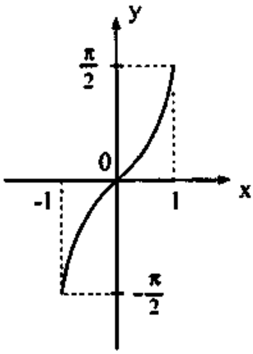
Вычислим $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ (тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) и $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ (тогда $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$ и $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$). Надо найти сумму углов $\alpha+\beta$. Сразу найти такую сумму нельзя. Поэтому вычислим любую тригонометрическую функцию от суммы углов. Проще всего найти тангенс. Учитывая известную формулу, получаем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=$

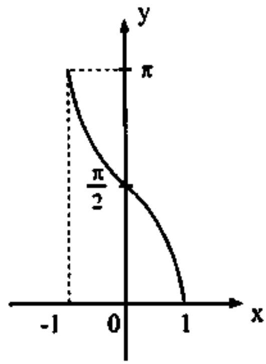
$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$ Так как $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\beta>0$, то $\alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha+\beta\in[0;\pi)$. В промежутке $[0;\pi)$ уравнение $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$ имеет единственное решение $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. Поэтому $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим более подробно свойства обратных тригонометрических функций (приведены в таблице).

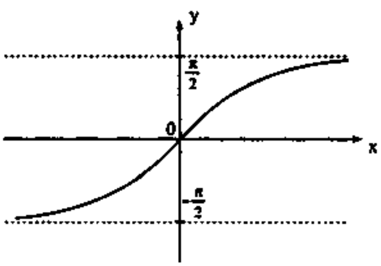
Свойства функции	Функции			
	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\operatorname{arctg} x$	$y=\operatorname{arcctg} x$
Область определения	$x\in[-1;1]$	$x\in[-1;1]$	$x\in(-\infty;+\infty)$	$x\in(-\infty;+\infty)$
Область значений	$y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$y\in[0;\pi]$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$y\in(0;\pi)$
Четность	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная
Нули функции ($y=0$)	При $x=0$	При $x=1$	При $x=0$	$y\neq0$
Промежутки знакопостоянства	$y>0$ при $x\in(0;1]$ $y<0$ при $x\in[-1;0)$	$y>0$ при $x\in[-1;1)$	$y>0$ при $x\in(0;+\infty)$ $y<0$ при $x\in(-\infty;0)$	$y>0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает
Связь с тригонометрической функцией	$\sin y=x$	$\cos y=x$	$\operatorname{tg} y=x$	$\operatorname{ctg} y=x$
График	а	б	в	г



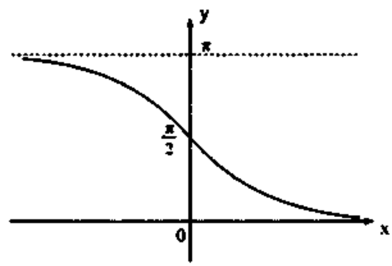
а) $y = \arcsin x$



б) $y = \arccos x$



в) $y = \operatorname{arctg} x$



г) $y = \operatorname{arcctg} x$

Приведем еще ряд типичных примеров, связанных с определениями и основными свойствами обратных тригонометрических функций.

Пример 7

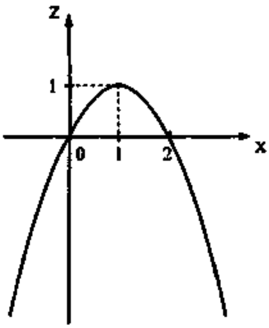
Найти область определения функции $y = \arcsin(2x + x^2)$.

Для того чтобы функция y была определена, необходимо выполнение неравенства $-1 \le 2x + x^2 \le 1$, которое эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} -1 \le 2x + x^2 \\ 2x + x^2 \le 1 \end{cases}$. Решением первого неравенства является промежуток $x \in (-\infty; +\infty)$, второго – $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$. Этот промежуток $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ и является решением системы неравенств, а следовательно, и областью определения функции $D(y) = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$.

Пример 8

Найти область изменения функции $y = \operatorname{arcctg}(2x - x^2)$.

Рассмотрим поведение функции $z = 2x - x^2$ (см. рис.).



Видно, что $z \in (-\infty; 1]$. Учитывая, что аргумент z функции арккотангенс меняется в указанных пределах, из таблицы получаем, что $y = \operatorname{arcctg} z \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$. Таким образом, область изменения $E(y) = \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Пример 9

Доказать, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ – нечетная. Пусть $y(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -x$ или $x = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, причем $-\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $-\alpha = \operatorname{arctg} x$ или $\alpha = -\operatorname{arctg} x$. Таким образом, видим, что $\alpha = \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, то есть $y(x)$ – функция нечетная.

Пример 10

Доказать, что при $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ выполнено равенство $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$.

Пусть $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$. Так как $x, y \in [0; 1]$, то $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \ge \beta \ge 0$. Вычитая почленно эти неравенства (это можно сделать, то есть неравенства имеют противоположные знаки, причем знаки полученного неравенства такие же, как и первого), получим $-\frac{\pi}{2} \le \alpha - \beta \le \frac{\pi}{2}$. Функция синус на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ монотонна, что позволяет по значению синуса однозначно определить угол.

Итак, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Так как $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = y$, то $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$ (в последних двух выражениях взят знак плюс, так как $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). Поэтому $\sin(\alpha-\beta) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$ и $\alpha - \beta = \arcsin x - \arcsin y = = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$. Итак, равенство доказано.

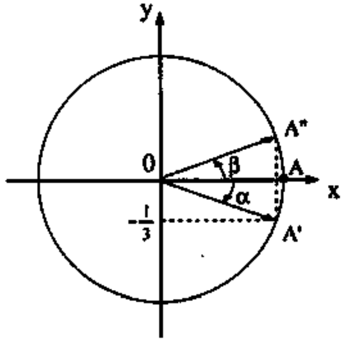
Пример 11

Выразить через все обратные тригонометрические функции $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Пусть $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$. Очевидно, что $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$. Так как $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Введем угол $\beta = -\alpha$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $\cos\beta = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то $\beta = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha = -\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Аналогично $\operatorname{ctg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$, поэтому $\beta = \operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$ и $\alpha = -\operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$.



Итак, $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\mathrm{arcctg}\,2\sqrt{2}$.

Пример 12

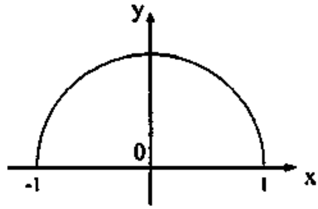
Вычислить $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Пусть $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$. Тогда $\alpha \in \left[0;\, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$ и $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = $ $= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Пример 13

Построить график функции $y = \cos(\arcsin x)$.

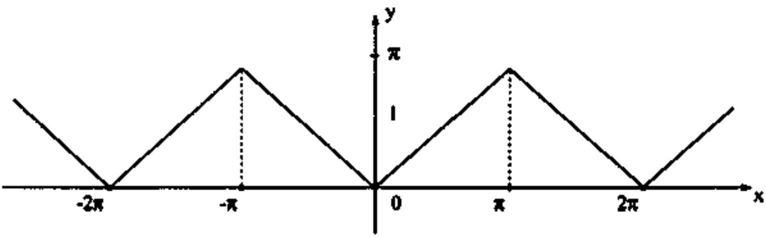
Пусть $\alpha = \arcsin x$. Тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$ и $y = \cos\alpha \geq 0$. Учтем, что $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, то есть $x^2 + y^2 = 1$ и ограничения на x ($x \in [-1;\, 1]$) и y ($y \geq 0$). Тогда графиком функции $y = \cos(\arcsin x)$ является полуокружность.



Пример 14

Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Так как функция $\cos x$ изменяется на отрезке $[-1; 1]$, то функция y определена на всей числовой оси и изменяется на отрезке $[0; \pi]$. Учтем, что $y = \arccos(\cos x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$; функция y является четной и периодической с периодом 2π, учитывая, что этими свойствами обладает функция $\cos x$. Теперь легко построить график.



III. Задание на уроке

№ 116 (а, б); 117 (б); 118 (а); 119 (в); 120 (г); 124 (а, б); 126 (в); 128 (г); 129 (б); 131 (а, в); 132 (а); 134 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему о корне уравнения.

2. Дайте определение и перечислите основные свойства обратных тригонометрических функций (желательно фронтальным опросом).

3. Приведите графики обратных тригонометрических функций (рекомендуется фронтальный опрос).

V. Задание на дом

№ 116 (в, г); 117 (г); 118 (в); 119 (б); 120 (в); 124 (в, г); 126 (в); 128 (в); 130 (г); 131 (б, г); 133 (б); 134 (б, г).

VI. Творческие задания

1. Найти область определения функции:

а) $y = \cos(\arcsin 3x)$; б) $y = \sin(\arccos 2x)$;

в) $y = \arccos(\sin 5x)$; г) $y = \arcsin(\cos 4x)$;

д) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$; е) $y = \arccos(\operatorname{ctg} x)$;

ж) $y = \arcsin(2|x| - 3)$; з) $y = \arccos(3|x| - 2)$;

и) $y = \arcsin \dfrac{2x-1}{x+1}$; к) $y = \arccos \dfrac{x-3}{2x-1}$;

л) $y = \arcsin(x^2 - x - 1)$; м) $y = \arccos(x^2 + x + 1)$.

Ответы:

а) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; в, г) R; д) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, где $n \in Z$;

е) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, где $n \in Z$; ж) $[-2; -1] \cup [1; 2]$;

з) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$; и) $[0; 2]$; к) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$;

л) $[-1; 0] \cup [1; 2]$; м) $[-1; 0]$.

2. Найти область значений функции:

а) $y = \arcsin(3x-2)$; б) $y = \arccos(3-2x)$;

в) $y = \mathrm{arctg}(1-2|x|)$; г) $y = \mathrm{arcctg}(4|x|-1)$;

д) $y = \mathrm{arctg}(\cos x)$; е) $y = \mathrm{arcctg}(\sin x)$;

ж) $y = \arcsin\sqrt{x}$; з) $y = \arccos\frac{1}{x^2+1}$;

и) $y = \mathrm{arctg}\frac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}$; к) $y = \arcsin\frac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+2}$.

Ответы: а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[0; \pi]$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right]$;

д) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; ж) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; з) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; и) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$;

к) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Докажите равенства:

а) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$; б) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

в) $\mathrm{arcctg}\, x + \mathrm{arcctg}(-x) = \pi$; г) $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}$.

4. Вычислите:

а) $\mathrm{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$;

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$;

в) $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$; г) $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

д) $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$; е) $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$;

ж) $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; з) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

и) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

к) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

л) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

Ответы: а) $-\frac{a}{b}$; б) $-\frac{b}{a}$; в, г) $\frac{6}{25}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; ж) 0,98; з) $-\frac{119}{120}$; и) –2; к, л) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. Постройте графики функций:

а) $y=\arcsin(x-3)$; б) $y=\arccos(x+2)$; в) $y=\sin(\arcsin x)$;

г) $y=\cos(\arccos x)$; д) $y=\sin(\arccos x)$; е) $y=-\cos(\arcsin x)$;

ж) $y=\arcsin(\sin x)$; з) $y=\arccos(\cos x)$; и) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

к) $y=\sin(2\operatorname{arctg} x)$; л) $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(1-x))$;

м) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2x}$; н) $y=\arccos\frac{1}{x^2}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 40–41. Решение простейших тригонометрических уравнений

Цель: рассмотреть общий вид решений простейших тригонометрических уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение и перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

2. Постройте график функции:

а) $y = \arcsin(x+4)$; б) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{x^2+\sqrt{3}}$.

3. Вычислите $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2} + \arccos\dfrac{1}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Дайте определение и перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

2. Постройте график функции:

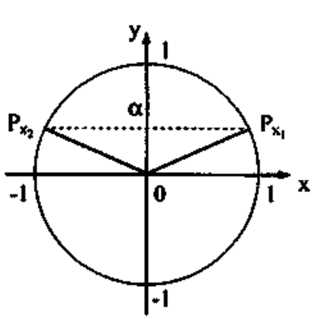
а) $y = \arccos(x-3)$; б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}$.

3. Вычислите $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

III. Изучение нового материала

Для решения любого тригонометрического уравнения его надо **свести к одному из четырех простейших** (фактически методы решения тригонометрических уравнений являются способами сведения их к простейшим). Простейшими тригонометрическими уравнениями являются: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Рассмотрим их решения.

Решения уравнения $\sin x = a$



Очевидно, что при $a > 1$ такое уравнение решений не имеет, так как функция синус ограничена и $|\sin x| \le 1$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ возрастает и принимает все значения от -1 до 1. Тогда по теореме о корне на этом промежутке при $|a| \le 1$ уравнение $\sin x = a$ имеет единственное решение $x_1 = \arcsin a$. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ убывает и также принимает все значения от -1 до 1. Поэтому и на этом промежутке при $|a| \le 1$ уравнение $\sin x = a$ тоже имеет единственное решение $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin a$. Действительно, $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$. Кроме того, поскольку $-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \le -x_1 \le \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} \le \pi - x_1 \le \frac{3\pi}{2}$, то есть x_2 принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем две формулы для записи **всех решений** данного уравнения: $x = \arcsin a + 2\pi n$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, где $n \in Z$. Такие решения удобно описывать не двумя, а одной формулой:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$$

Действительно, при четных $k = 2n$ из этой формулы получаем все решения, описываемые первой формулой; при нечетных $k = 2n + 1$ – решения, записываемые второй формулой.

Заметим, что **в частных случаях** $a = 0; \pm 1$ **проще и удобнее использовать не общую формулу, а записывать решения на основании единичной окружности:**

для уравнения $\sin x = 1$ решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

для уравнения $\sin x = 0$ решения $x = \pi k$;

для уравнения $\sin x = -1$ решения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 1

Решим уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

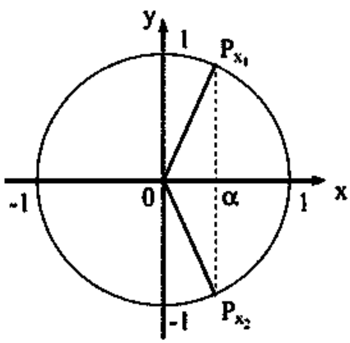
По приведенной формуле запишем решения уравнения $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 2

Решим уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как функция синус нечетная, то запишем уравнение в виде $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решения этого уравнения $3x-\frac{\pi}{6}=$ $=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$, откуда находим $x=\frac{\pi}{18}+$ $+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

Решения уравнения $\cos x = a$



При $a > 1$ такое уравнение решений не имеет, так как функция косинус ограничена и $|\cos x|\le 1$. На отрезке $[0;\ \pi]$ функция $\cos x$ убывает и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому по теореме о корне на этом промежутке при $|a|\le 1$ уравнение $\cos x = a$ имеет единственное решение $x_1=\arccos a$. Так как функция $\cos x$ четная, то на отрезке $[-\pi;\ 0]$ данное уравнение также имеет единственное решение $x_2=-x_1=-\arccos a$. Итак, уравнение $\cos x = a$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ имеет два решения $x=\pm\arccos a$.

Учитывая, что период косинуса равен 2π, то получаем формулу для записи **всех решений** данного уравнения:

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.$$

В частных случаях $a = 0;\ \pm 1$ **проще и удобнее** использовать не общую формулу, а записывать решения **на основании единичной окружности**:

для уравнения $\cos x = 1$ решения $x = 2\pi k$;

для уравнения $\cos x = 0$ решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$;

для уравнения $\cos x = -1$ решения $x = \pi + 2\pi k$.

Пример 3

Решим уравнение $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

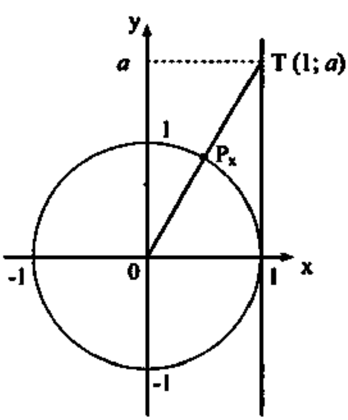
Используя приведенную формулу, запишем решения этого уравнения $x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi ak,\ k \in Z$ (учтено, что $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$).

Пример 4

Решим уравнение $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Так как в данном случае имеется частный случай уравнения, то по соответствующей формуле запишем решения $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, откуда найдем $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решения уравнения $\mathrm{tg}\, x = a$



На отрезке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $\mathrm{tg}\, x$ возрастает и принимает все значения от $-\infty$ до ∞. Тогда по теореме о корне при любом значении a

на этом промежутке уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет единственное решение, равное $x = \operatorname{arctg} a$. Так как функция тангенс имеет период π, то получаем формулу для всех решений данного уравнения:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.$$

Пример 5

Решим уравнение $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

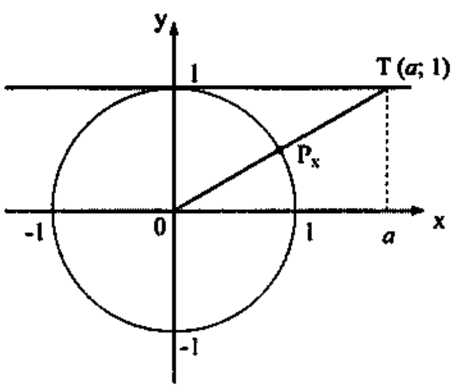
Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Используя приведенную формулу, выпишем решения уравнения $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 6

Решим уравнение $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 2.$

По приведенной формуле запишем решения уравнения $4x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$ и найдем $x = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}k,\ k \in Z.$

Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$



На отрезке $(0; \pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ убывает и принимает все значения от $-\infty$ до ∞. Тогда по теореме о корне при любом значении a на этом промежутке уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет единственное решение $x = \operatorname{arcctg} a$. Учитывая, что период котангенса равен π, получим формулу для записи всех решений данного уравнения:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.$$

Пример 7

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = -1$.

Используя приведенную формулу, запишем решения уравнения $x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 8

Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{3}$.

Учтем, что функция котангенс нечетная, и запишем уравнение в виде $\operatorname{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$. Решения этого уравнения $2x - \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k = \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$. Теперь найдем $x = \dfrac{13\pi}{24} + \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z$.

IV. Задание на уроке

№ 136 (а, г); 137 (в); 139 (б); 140 (а); 145 (а, в, г); 147 (а, в); 148 (б).

V. Контрольные вопросы (рекомендуется фронтальный опрос)

1. Выпишите решения простейших тригонометрических уравнений.

2. Приведите решения для частных случаев уравнений $\sin x = 0; \pm 1$ и $\cos x = 0; \pm 1$.

VI. Задание на дом

№ 136 (в); 137 (г); 139 (в); 141 (г); 146 (а, б, в); 147 (б, г); 148 (в); 149.

VII. Творческие задания

Решите простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{3}$; 2) $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg}\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$; 4) $\operatorname{ctg}\left(0{,}5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -5$.

Ответы: 1) $0{,}5 \cdot (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi}{2}n$;

2) $\pm\dfrac{1}{3}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2}{3}\pi n$;

3) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg} 2-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n$;

4) $2\operatorname{arcctg}(-5)+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n \in Z$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 42–45. Тригонометрические уравнения

Цель: рассмотреть основные типы тригонометрических уравнений и способы их решения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите уравнение $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n$;

в) $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n$; г) $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, где $n \in Z$.

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{12}$.

3. Найдите корни уравнения $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.

Ответы: а) $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{9}$; 0; б) $-\frac{2\pi}{3}$; 0; в) $-\frac{5\pi}{9}$; 0; г) 0.

Вариант 2

1. Решите уравнение $2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

Ответы: а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$; в) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$; г) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$.

3. Найдите корни уравнения $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$, принадлежащие промежутку $[0;\ \pi]$.

Ответы: а) $0;\ \frac{\pi}{12};\ \frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{11\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{4};\ \frac{11\pi}{12}$; г) $\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{4}$.

III. Изучение нового материала

Более **сложные** тригонометрические уравнения решаются путем их **сведения к простейшим**. Способы сведения уравнений к простейшим по сути и являются способами их решения. Рассмотрим их.

1. Замена неизвестной

Если в уравнении тригонометрические функции удается выразить через **одну** функцию, то эту функцию можно выбрать в качестве **новой неизвестной**.

Пример 1

Решим уравнение $5\cos^2 x-3\cos x=2$.

Введем новую неизвестную $\cos x=y$ и получим квадратное уравнение $5y^2-3y-2=0$, корни которого $y_1=1$ и $y_2=-\frac{2}{5}$. Вернемся к старой переменной. Имеем два простейших уравнения:

а) $\cos x=1$, его решения $x=2\pi n$, $n\in Z$;

б) $\cos x=-\frac{2}{5}$, его решения $x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi k$, $k\in Z$.

Достаточно часто для приведения уравнения к одной переменной используют **основное тригонометрическое тождество**.

Пример 2

Решим уравнение $5-7\sin x=3\cos^2 x$.

Используя основное тригонометрическое тождество, выразим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и запишем в виде: $5 - 7\sin x = 3(1 - \sin^2 x)$ или $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$. Введем новую неизвестную $y = \sin x$ и получим квадратное уравнение $3y^2 - 7y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = \frac{1}{3}$ и $y_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной x. Получаем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x = \frac{1}{3}$, его решения $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\sin x = 2$, решений не имеет, так как $\sin x \le 1$.

На экзаменах регулярно встречаются **однородные** уравнения различных степеней. Ознакомимся с ними.

Пример 3

Решим уравнение $2\sin x + 5\cos x = 0$.

Левая часть уравнения содержит функции $\sin x$ и $\cos x$, входящие в одной и той же первой степени, правая часть равна нулю. Поэтому данное уравнение называют **однородным уравнением первой степени.**

Проверим, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению. Действительно, при подстановке $\cos x = 0$ в уравнение получаем $2\sin x = 0$ или $\sin x = 0$. Но если $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$, то не выполняется основное тригонометрическое тождество. Следовательно (от противного), $\cos x \ne 0$.

Разделим все члены данного уравнения на $\cos x$ (так как $\cos x \ne 0$). Получаем уравнение: $2\frac{\sin x}{\cos x} + 5 = 0$ или $2\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$, откуда $\mathrm{tg}\,x = -2{,}5$. Решения этого простейшего уравнения $x = \mathrm{arctg}(-2{,}5) + \pi n = -\mathrm{arctg}\,2{,}5 + \pi n$, $n \in Z$. Учтено, что функция арктангенс является нечетной.

Пример 4

Решим уравнение $6\sin^2 2x - 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 0$.

Левая часть уравнения содержит функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$, входящие в одной и той же второй степени (при этом произведению $\sin 2x\cos 2x$ приписывается степень, равная сумме степеней множителей, то есть тоже вторая), правая часть равна нулю. Поэтому данное уравнение называют **однородным уравнением второй степени.**

Проверим, что $\cos 2x = 0$ не удовлетворяет уравнению. При подстановке $\cos 2x = 0$ в уравнение получаем $6\sin^2 2x = 0$ или

$\sin 2x = 0$. Так как $\cos 2x = 0$ и $\sin 2x = 0$, то не выполняется основное тригонометрическое тождество. Следовательно, $\cos 2x \neq 0$. Поэтому разделим все члены данного уравнения на $\cos^2 2x$ и получим: $6\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - 5\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1 = 0$ или $6\,\mathrm{tg}^2 2x - 5\,\mathrm{tg}\,2x + 1 = 0$.

Введем новую переменную $y = \mathrm{tg}\,2x$. Имеем квадратное уравнение $6y^2 - 5y + 1 = 0$, корни которого $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной и получаем простейшие уравнения:

а) $\mathrm{tg}\,2x = \frac{1}{2}$, тогда $2x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$ и $x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}\,2x = \frac{1}{3}$, тогда $2x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$ и $x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Достаточно часто уравнения, формально не являющиеся однородными, можно **свести к однородным**, используя основное тригонометрическое тождество.

Пример 5

Решим уравнение $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 1$.

Левая часть уравнения представляет собой **однородный** многочлен **второй степени** по переменным $\sin x$ и $\cos x$. Однако в правой части уравнения вместо числа 0 стоит число 1. Поэтому используя **основное тригонометрическое тождество**, запишем число 1 также **в виде однородного многочлена второй степени**: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Тогда получаем уравнение $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$. Такое уравнение уже является однородным и решается аналогично предыдущему примеру.

Обычным способом убеждаемся, что в таком уравнении $\cos x \neq 0$ и делим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}\,x + 4 = 0$. Введем новую переменную $y = \mathrm{tg}\,x$ и получим квадратное уравнение $y^2 + 5y + 4 = 0$, корни которого $y_1 = -1$ и $y_2 = -4$. Вернемся к старой неизвестной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\mathrm{tg}\,x = -1$, его решения $x = \mathrm{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}\,x = -4$, его решения $x = \mathrm{arctg}(-4) + \pi k = -\mathrm{arctg}\,4 + \pi k$, $k \in Z$ (была учтена нечетность функции арктангенс).

На практике распространены **симметричные** уравнения, то есть уравнения, которые **не меняются при замене $\sin x$ на $\cos x$ и наоборот** (с точностью до перестановки множителей и слагаемых). Такие уравнения решаются с помощью замены $y = \sin x + \cos x$ (простейший симметричный двучлен).

Пример 6

Решим уравнение $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 4\sin x\cos x$.

Если заменить $\sin x$ на $\cos x$ и наоборот, то получаем уравнение $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 4\cos x\sin x$, которое совпадает с данным с точностью до перестановки слагаемых и множителей. По определению данное уравнение является **симметричным**.

Введем новую переменную $y = \sin x + \cos x$. Возведем это равенство в квадрат: $y^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$ или $y^2 = 1 + 2\sin x\cos x$, откуда $\sin x\cos x = \dfrac{y^2-1}{2}$. Подставив выражения $\sin x + \cos x = y$ и $\sin x\cos x = \dfrac{y^2-1}{2}$ в данное уравнение, получим квадратное уравнение: $\sqrt{2}y = 4\cdot\dfrac{y^2-1}{2}$ или $2y^2 - \sqrt{2}y - 2 = 0$. Его корни $y_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{4}$, то есть $y_1 = \sqrt{2}$ и $y_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. При этом **удобнее** использовать соотношение: $\sin x\cos x = \dfrac{y^2-1}{2}$ и $2\sin x\cos x = y^2 - 1$, то есть $\sin 2x = y^2 - 1$.

а) Для $y = \sqrt{2}$ имеем уравнение $\sin 2x = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$. Его решения $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Для $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ получаем уравнение $\sin 2x = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

Его решения $2x = (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^k\cdot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi k =$
$= (-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, откуда $x = (-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Аналогичным способом можно решать уравнения, **похожие по структуре на симметричные уравнения.**

Пример 7

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

Формально данное уравнение не является симметричным, но имеет похожую структуру. Поэтому решим его аналогично предыдущему примеру.

Введем новую переменную $y = \sin x - \cos x$. Возведем в квадрат это равенство и получим $y^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x$ или $y^2 = 1 - 2\sin x \cos x$, откуда выразим $\sin x \cos x = \frac{1-y^2}{2}$ в данное уравнение. Имеем квадратное уравнение: $y = 1 + \frac{1-y^2}{2}$ или $y^2 + 2y - 3 = 0$, корни которого $y_1 = 1$ и $y_2 = -3$.

Вернемся к старой переменной. Для этого используем соотношение $\sin x \cos x = \frac{1-y^2}{2}$, откуда $\sin 2x = 1 - y^2$.

а) Для $y = 1$ получаем уравнение $\sin 2x = 0$, тогда $2x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

б) Для $y = -3$ имеем уравнение $\sin 2x = -8$, которое решений не имеет, так как $|\sin 2x| \le 1$.

В ряде случаев при решении уравнений полезно использовать **универсальную тригонометрическую подстановку**. Она использует формулы (выведите самостоятельно): $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2y}{1-y^2}$ (где $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$) и позволяет **выражать функции** $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ **через одну и ту же функцию** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 8

Решим уравнение $5\sin x + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

Используем универсальную тригонометрическую подстановку и получим уравнение: $5 \cdot \frac{2y}{1+y^2} + 2y = 0$ (где $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$) или

$y(y^2+6)=0$, которое имеет единственный корень $y=0$. Вернемся к старой неизвестной и получим уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=0$, откуда $\dfrac{x}{2}=\pi n$ и $x=2\pi n$, где $n\in Z$.

Пример 9

Решим уравнение $(1+\operatorname{tg}x)(1-\sin 2x)=1-\operatorname{tg}x$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $y=\operatorname{tg}x$ и получим уравнение: $(1+y)\left(1-\dfrac{2y}{1+y^2}\right)=1-y$ или $(1+y)(1-y)^2=(1-y)(1+y^2)$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(1-y)((1+y)(1-y)-(1+y^2))=0$ или $(1-y)y^2=0$. Корни этого уравнения $y_1=1$ и $y_2=0$.

Вернемся к старой переменной и получим простейшие уравнения:

а) $\operatorname{tg}x=1$, его решения $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$;

б) $\operatorname{tg}x=0$, его решения $x=\pi k$, $k\in Z$.

Перейдем к следующему способу решения тригонометрических уравнений.

2. Разложение на множители

Если одну из частей уравнения удается **разложить на множители**, а другая часть равна нулю, то исходное уравнение сводится к **совокупности более простых уравнений.**

Пример 10

Решим уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

Сгруппируем члены уравнения $(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=0$ и преобразуем сумму синусов в произведение: $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$. Вынесем общий множитель в левой части за скобки и разложим ее на множители $\sin 2x(2\cos x+1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем простейшие уравнения:

а) $\sin 2x=0$, его решения $2x=\pi n$ и $x=\dfrac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$;

б) $2\cos x+1=0$ или $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, его решения

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \text{где } k\in Z.$$

Пример 11

Решим уравнение $\sin x-\cos 3x=0$.

Так как не существует формулы для разности разноименных функций, то с помощью формулы приведения превратим функцию синус в косинус: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos 3x=0$. Преобразуем разность косинусов в произведение: $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, его решения $2x-\frac{\pi}{4}=\pi n$ и $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$, его решения $\frac{\pi}{4}+x=\pi k$ и $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in Z$.

Преобразование **суммы** тригонометрических функций **в произведение** в ряде задач удобно сочетать с обратным преобразованием **произведения** функций в сумму.

Пример 12

Решим уравнение $\cos x\cos 5x=\cos 3x\cos 7x$.

Прежде всего в каждой части уравнения преобразуем произведение косинусов в сумму функций: $\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)=$ $=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10x)$. После очевидных упрощений получаем $\cos 6x=\cos 10x$. Из правой части уравнения перенесем член в левую часть $\cos 6x-\cos 10x=0$ и преобразуем разность косинусов в произведение функций $2\sin 2x\sin 8x=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем простейшие уравнения:

а) $\sin 2x=0$, его решения $2x=\pi n$ и $x=\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$;

б) $\sin 8x=0$, его решения $8x=\pi k$ и $x=\frac{\pi}{8}k$, где $k\in Z$.

Легко увидеть, что при $k=4n$ решения $x=\frac{\pi}{8}k$ включают в себя решения $x=\frac{\pi}{2}n$. Поэтому все решения данного уравнения (случаи *а* и *б*) можно записать в виде $x=\frac{\pi}{8}k$, где $k\in Z$.

Разумеется, при разложении на множители тригонометрического выражения часто используются формулы для **функций кратных углов.**

Пример 13

Решим уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$.

Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим $\sqrt{3}\cos x + 2\sin x\cos x = 0$. Вынесем общий множитель за скобки $\cos x(\sqrt{3} + 2\sin x) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем уравнения:

а) $\cos x = 0$, его решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

б) $\sqrt{3} + 2\sin x = 0$ или $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, его решения

$x = (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k \cdot \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

3. Понижение степени уравнения

Если в уравнение входят функции **в высоких степенях**, то полезно использовать формулы понижения степени (очевидно, что уравнение **меньшей** степени **проще** решается). Напомним такие формулы: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$. Каждая из этих формул позволяет заменить **выражение второй степени** на **соотношение первой степени** и тем самым **понизить степень уравнения.**

Пример 14

Решим уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Используем формулы понижения степени и запишем уравнение в виде: $\dfrac{1+\cos 4x}{2} + \dfrac{1+\cos 6x}{2} = 1$ или $\cos 4x + \cos 6x = 0$. Преобразуем сумму косинусов в произведение: $2\cos 5x\cos x = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\cos 5x = 0$, его решения $5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5}n$, где $n \in Z$;

б) $\cos x = 0$, его решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

Пример 15

Решим уравнение $\cos 2x+(2\sin^2 x)^2=(2\cos^2 x)^3$ и используем формулы понижения степени: $\cos 2x+(1-\cos 2x)^2=(1+\cos 2x)^3$. Введем новую неизвестную $y=\cos 2x$ и получим алгебраическое уравнение: $y+(1-y)^2=(1+y)^3$, или $y+1-2y+y^2=1+3y+3y^2+y^3$, или $0=y^3+2y^2+4y$, или $0=y(y^2+2y+4)$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $y=0$ и $y^2+2y+4=0$ (это квадратное уравнение корней не имеет, так как его дискриминант отрицательный).

Вернемся к старой неизвестной x. Получаем уравнение $\cos 2x=0$, его решения $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$.

Достаточно часто в рассматриваемые уравнения входят **симметричные двучлены высокой степени**. Разумеется, степень таких двучленов необходимо понизить. Приведем некоторые **соотношения, понижающие степень** симметричных двучленов:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}(3+\cos 4x);$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\left(1+3\cos^2 2x\right)=\frac{1}{8}(5+3\cos 4x);$$

$$\sin^8 x+\cos^8 x=1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cos^2 2x+\frac{1}{8}\cos^4 2x.$$

Пример 16

Решим уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin x\cos x=1\frac{3}{8}$.

Так как в уравнение входит выражение $2\sin x\cos x=\sin 2x$, то удобно и выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$ также выразить через функцию $\sin 2x$. Получаем уравнение: $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\sin 2x=1\frac{3}{8}$ или $0=4\sin^2 2x-8\sin 2x+3$. Сделаем замену $y=\sin 2x$ и получим квадратное уравнение $0=4y^2-8y+3$, корни которого $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{3}{2}$.

Вернемся к старой переменной и получаем тригонометрические уравнения:

а) $\sin 2x=\frac{1}{2}$, его решения $2x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$;

б) $\sin 2x = \frac{3}{2}$, решений нет, так как $\sin 2x \le 1$.

4. Введение вспомогательного угла

Этот способ основан на использовании **формул для синуса или косинуса суммы (разности) двух углов**. Они применяется при решении уравнений $a\sin x + b\cos x = c$ (где *a*, *b*, *c* – некоторые коэффициенты). Изложим суть этого способа.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ и получим: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Так как выполнены условия $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можно считать $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ (или наоборот). Из этих соотношений можно найти угол φ. Тогда уравнение имеет вид: $\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это уравнение является простейшим и имеет решения только при $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 17

Решим уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Найдем $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ и разделим все члены уравнения на 2. Получаем: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$. Будем считать, что $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ и $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Уравнение принимает вид: $\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$ или $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, откуда $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$.

Заметим, что уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ можно преобразовать и по-другому. Для этого достаточно считать, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ и

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$. Тогда уравнение имеет вид: $\sin\alpha\sin x+$ $+\cos\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 18

Решим уравнение $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\cos 16x$.

Преобразуем левую часть уравнения. Вычислим $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ и разделим все члены уравнения на $\sqrt{2}$. Получаем: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 10x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10x=\cos 16x$. Будем считать, что $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Уравнение принимает вид: $\sin\frac{\pi}{4}\sin 10x+\cos\frac{\pi}{4}\cos 10x=\cos 16x$ или $\cos\left(10x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 16x$. Запишем уравнение в виде $\cos\left(10x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 16x=0$ и преобразуем разность косинусов в произведение $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(13x-\frac{\pi}{8}\right)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два уравнения:

а) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=0$, его решения $3x+\frac{\pi}{8}=\pi n$ и $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}n$, где $n\in Z$;

б) $\sin\left(13x-\frac{\pi}{8}\right)=0$, его решения $13x-\frac{\pi}{8}=\pi k$ и $x=\frac{\pi}{104}+\frac{\pi}{13}k$, где $k\in Z$.

5. Ограниченность тригонометрических функций

При решении уравнений этого типа существенным является ограниченность функций синус и косинус, то есть $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$.

Пример 19

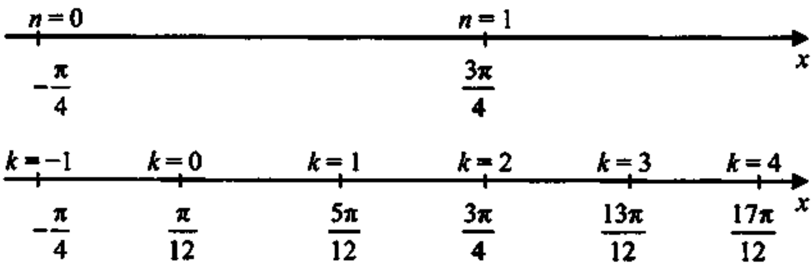
Решим уравнение $\sin 2x-\sin 6x+2=0$.

Очевидно, что в силу ограниченности функции синус такое уравнение имеет решение в случае одновременного выполнения равенств

$\begin{cases}\sin 2x = -1\\ \sin 6x = 1\end{cases}$. Решая уравнения этой системы, получаем

$$\begin{cases}2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z\\ 6x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\\ x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3}k\end{cases}.$$

Из этих решений необходимо выбрать общие, то есть такие, при которых уравнение системы обращается в равенство. Нанесем на числовой оси решения x_1 и x_2 для нескольких значений n и k. Из рисунка видно, что общие решения совпадают с x_1. Поэтому решения данного уравнения $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.



Пример 20

Решим уравнение $\sin^8 x + \cos^{23} x = 1$.

Оценим слагаемые, входящие в левую часть уравнения:

$\sin^8 x \le \sin^2 x$ (равенство выполняется в случае $\sin x = 0; \pm 1$);

$\cos^{23} x \le \cos^2 x$ (равенство выполняется в случае $\cos x = 0; 1$).

Сложим два неравенства одного знака (при этом знак неравенства сохраняется) и получим: $\sin^8 x + \cos^{23} x \le \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\sin^8 x + \cos^{23} x \le 1$ (с учетом основного тригонометрического тождества). Таким образом, левая часть данного уравнения не больше 1. Поэтому данное уравнение может выполняться только в двух случаях: $\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = 1\end{cases}$ и $\begin{cases}\sin x = \pm 1\\ \cos x = 0\end{cases}$. Очевидно, что первая система равносильна уравнению $\cos x = 1$ (его решения $x = 2\pi n$, где $n \in Z$), вторая система равносильна уравнению $\cos x = 0$ (его решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$).

Ограниченность функций синус и косинус используется и при решении **уравнений с несколькими неизвестными**.

Пример 21

Решим уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

Преобразуем обе части уравнения. В левой части учтем, что $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$, в правой части выделим квадрат разности чисел. Получаем уравнение: $\dfrac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = (y^2 - 4y + 4) + 1$ или $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = (y-2)^2 + 1$ или $\sin x = (y-2)^2 + 1$. Учтем, что $\sin x \le 1$, $(y-2)^2 + 1 \ge 1$. Поэтому данное уравнение имеет решения только в случае $\begin{cases} \sin x = 1 \\ (y-2)^2 + 1 = 1 \end{cases}$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in Z$) и $y = 2$.

6. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

На экзаменах такие уравнения встречаются значительно реже уравнений, рассмотренных ранее. Их решение, как правило, основано на определении обратных тригонометрических функций и знании их свойств.

Пример 22

Решим уравнение $2\arcsin x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi^2}{9\arcsin x}$.

Так как в уравнение входит только функция arcsin x, то введем новую неизвестную y = arcsin x и получим рациональное уравнение: $2y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi^2}{9y}$ или $18y^2 - 3\pi y - \pi^2 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = \dfrac{\pi}{3}$ и $y_2 = -\dfrac{\pi}{6}$. Оба корня входят в область значений функции arcsin x, то есть $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вернемся к старой неизвестной и получим уравнения:

а) $\arcsin x=\frac{\pi}{3}$, тогда $x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin x=-\frac{\pi}{6}$, откуда $x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

Итак, уравнение имеет два корня $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$; и $x_2=-\frac{1}{2}$.

Пример 23

Решим уравнение $2\operatorname{arctg}(2x+1)=\arccos x$.

Так как в правую часть уравнения входит функция $\arccos x$, то найдем обратную функцию косинус от обеих частей приведенного равенства. Получаем уравнение: $\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1))=\cos(\arccos x)$ или $\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1))=x$. Чтобы упростить левую часть, обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}(2x+1)$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=2x+1$. Вычислим $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$ $=\frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2}=\frac{-2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$. Тогда данное уравнение имеет вид: $\frac{-2x(x+1)}{2x^2+2x+1}=x$, или $-2x(x+1)=x(2x^2+2x+1)$, или $0=x(2x^2+4x+3)$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $x=0$ или $2x^2+4x+3=0$ (это уравнение корней не имеет, так как дискриминант отрицательный). Итак, уравнение имеет единственное решение $x=0$.

IV. Задание на уроке

№ 164 (б); 165 (а); 167 (а, б); 168 (а); 169 (а); 170 (а); 171 (в); 172 (б, в); 173 (б); 174 (а, б).

V. Задание на дом

№ 164 (г); 165 (б); 166 (г); 167 (в, г); 168 (в); 160 (в); 170 (г); 171 (а); 172 (а, г); 173 (в); 174 (в, г).

VI. Творческие задания

1. Решите уравнения, используя способ введения вспомогательного угла:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$;

в) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos 2x - \sin 2x = -\sqrt{2}$;

д) $3\sin x + 4\cos x = -5$; е) $\sin 2x + 7\cos 2x = 5$.

Ответы: а) $2\pi n + \frac{\pi}{3}$; $2\pi n$; б) $2\pi n + \frac{2}{3}\pi$; в) $(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n$;

г) $\frac{3}{8}\pi + \pi n$; д) $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi n$, где $n \in Z$.

2. Решите уравнения, преобразуя сумму и разность тригонометрических функций в произведение:

а) $\sin x - \cos 3x = 0$;

б) $\cos\frac{x}{3} - \sin x = 0$;

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 5x$;

г) $\sqrt{3}\sin 4x + 2\cos 2x + \cos 4x = 0$;

д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

е) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Ответы: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; б) $\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi n$; $\frac{3}{4}\pi + 3\pi n$;

в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n$; г) $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}n$; $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$;

д) $\frac{2\pi}{5}n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pi + 2\pi n$; е) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$.

3. Решите уравнения, преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму:

а) $\cos x \cos 5x = \cos 3x \cos 7x$;

б) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$;

в) $2\sin 5x \sin 2x = \cos x$;

г) $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$;

д) $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$;

е) $4\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 1$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{8}n$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$;

г) $\frac{\pi}{2}n$; $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}n$; д) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; е) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$; $\frac{2\pi}{3}n$, где $n \in Z$.

4. Решите уравнения, используя формулы понижения степени:

а) $\cos x-2\sin^2\frac{x}{2}=0$; б) $2\sin^2 x-1=\sin 3x$;

в) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; г) $\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$;

д) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$; е) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x$;

ж) $3+5\sin 2x=\cos 4x$; з) $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

Ответы: а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}n$; в) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$;

г) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n$; д) $\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}n$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; ж) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$;

з) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$.

5. Решите уравнения, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

а) $\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$; б) $1+\cos x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$;

в) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$; г) $4\sin 2x+3\cos 2x=5$;

д) $1+\cos 2x+\sin 2x=0$; е) $1+\cos x-\sin x=0$.

Ответы: а) $2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; в) $2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$;

д) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; е) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in Z$.

6. Решите уравнения, используя формулы для функций кратных углов:

а) $\sqrt{3}\cos x+\sin 2x=0$; б) $\cos x+\cos 2x=\sin x$;

в) $\cos^3\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$; г) $(\cos 2x-1)\operatorname{ctg}^2 x=-3\sin x$;

д) $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$; е) $3\sin x+3\cos x=\cos 3x-\sin 3x$;

ж) $\cos 9x-2\cos 6x=2$; з) $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pi+2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

в) $(-1)^n\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; д) πn; $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$; $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$;

е) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; ж) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$; $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}n$; з) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in Z$.

7. Решите уравнения, используя ограниченность функций синус и косинус:

а) $\cos 10x-\cos 7x=2$;

б) $\sin^4 x+\cos^{19} x=1$;

в) $\sqrt[4]{\sin 2x}+\sqrt[6]{\cos 2x}=1$.

Ответы: а) $\pi+\pi n$; б) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; в) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in Z$.

8. Решите уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\cos(\operatorname{arcctg} x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\arcsin x+3\arccos x=\frac{7}{6}\pi$;

г) $2\operatorname{arctg} x+3\operatorname{arcctg} x=\frac{5}{4}\pi$;

д) $2\arcsin^2 x-\arcsin x-8=0$;

е) $\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-4=0$;

ж) $\operatorname{arctg}^2(3x+2)+2\operatorname{arctg}(3x+2)=0$;

з) $3\operatorname{arctg}^2 x-4\pi\operatorname{arctg} x+\pi^2=0$;

и) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$;

к) $\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

л) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})=\arccos(2x^2-1)$;

м) $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$;

н) $2\arcsin(3x-1)=\arccos(2x^2-3x+1,5)$;

о) $2\arccos x+\arccos(3x+1)=2\pi$.

Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) -1; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $-\sin 1,5$; е) $-3\operatorname{tg} 1$; ж) $-1,5$; з) $\sqrt{3}$; и) $[0; 1]$; к) $(0; 1)$; л) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; м) $[0; 1]$; н) $\frac{1}{2}$; о) $-\frac{1}{2}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 46–47. Тригонометрические неравенства

Цель: рассмотреть способы решения тригонометрических неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнения:

а) $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$;

б) $5 - 7\sin x = 3\cos^2 x$;

в) $12\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Вариант 1

Решите уравнения:

а) $\sin 3x + \sin 7x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 5x\right)$;

б) $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$;

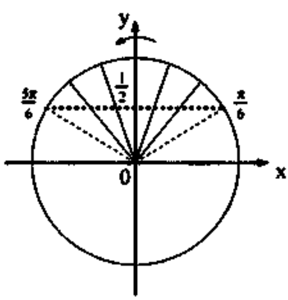
в) $3\sin 2x = 4(\sin x + \cos x + 1)$.

III. Изучение нового материала

Решение тригонометрических неравенств (как и уравнений), как правило, сводится к решению **простейших** тригонометрических **неравенств**. Поэтому прежде всего остановимся на решении таких неравенств. Их удобно решать, используя **единичную окружность**.

Пример 1

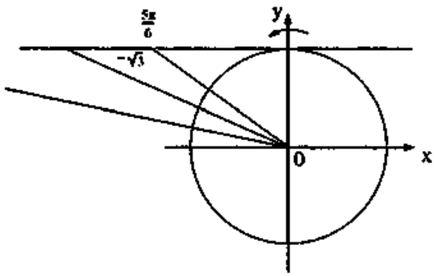
Решим неравенство $\sin x > \dfrac{1}{2}$.



На единичной окружности по оси ординат отложим значение $\sin x = \frac{1}{2}$ и построим соответствующие углы $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (углы откладываются против часовой стрелки и являются положительными). Из рисунка видно, что неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяют значения $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Учтем, что период функции синус составляет 2π, и получим решение данного неравенства: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Пример 2

Решим неравенство $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$.

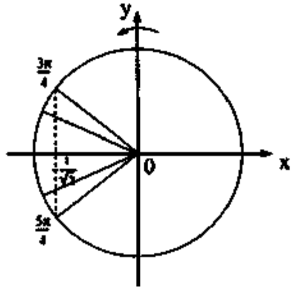


На оси котангенсов для единичной окружности отложим значение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ и построим соответствующий угол $x = \frac{5\pi}{6}$. Видно, что неравенству $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$ удовлетворяют значения $\frac{5\pi}{6} \le x < \pi$. Учитывая период функции котангенс (равный π), получаем решение данного неравенства $\frac{5\pi}{6} + \pi n \le x < \pi + \pi n$ или $x \in \left[\frac{5\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, где $n \in Z$.

В случае **сложного аргумента** тригонометрической функции рекомендуется обозначить его **новой переменной**, решить для него неравенство, а затем вернуться к старой неизвестной.

Пример 3

Решим неравенство $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$.



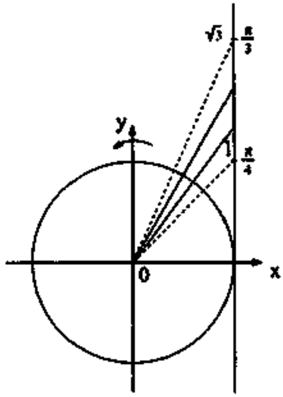
Обозначим аргумент косинуса $y = 3x - \frac{\pi}{6}$ и получим простейшее тригонометрическое неравенство $\cos y \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решим это неравенство. На единичной окружности по оси абсцисс отложим значение $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и построим соответствующие углы $y_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $y_2 = \frac{5\pi}{4}$. Тогда неравенству $\cos y \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяют значения $\frac{3\pi}{4} \le y \le \frac{5\pi}{4}$. Учтем периодичность функции $\cos y$ и получим решения $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le y \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Теперь вернемся к старой неизвестной x и получим двойное линейное неравенство $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le 3x - \frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. Ко всем частям неравенства прибавим число $\frac{\pi}{6}$. Имеем: $\frac{11}{12}\pi + 2\pi n \le 3x \le \frac{17}{12}\pi + 2\pi n$. Все части неравенства разделим на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется и получаем: $\frac{11}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n \le x \le \frac{17}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n$ или $x \in \left[\frac{11}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n; \frac{17}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right]$, где $x \in Z$.

Если неравенство не является **простейшим**, то используя **преобразования**, аналогичные тем, которые применялись для уравнений, сводим неравенство к простейшему.

Пример 4

Решим неравенство $\mathrm{tg}^2 x - (1+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3} < 0$.

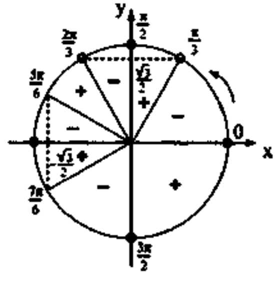


Введем новую переменную $y = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное неравенство $y^2-(1+\sqrt{3})y+\sqrt{3}<0$. Это неравенство имеет решение $1<y<\sqrt{3}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим двойное неравенство $1<\operatorname{tg}x<\sqrt{3}$. На единичной окружности по оси тангенсов отложим значения 1 и $\sqrt{3}$ и построим соответствующие углы $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{\pi}{3}$. Тригонометрическому неравенству удовлетворяют значения $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$. Учтем периодичность функции тангенс и получим решение данного неравенства: $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$ или $x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Также при решении тригонометрических неравенств можно использовать **метод интервалов** (который является универсальным для всех неравенств).

Пример 5

Решим неравенство $\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{\sin 2x(2\sin x-\sqrt{3})}\le 0$.



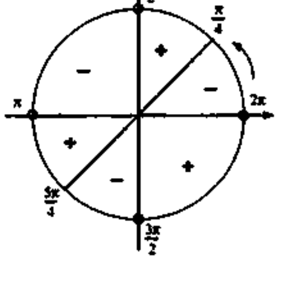
На единичной окружности отметим значения x, при которых обращается в ноль числитель $2\cos x+\sqrt{3}=0$ (откуда $x=\frac{5\pi}{6}$ и $x=\frac{7\pi}{6}$) и знаменатель $\sin 2x=0$ (тогда $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$) $2\sin x-\sqrt{3}=0$ (откуда $x=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{2\pi}{3}$) дроби. Определим знак этой дроби, например, при $x=\frac{\pi}{6}$ и получим $\dfrac{2\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{3})}<0.$

Учтем, что при проходе через отмеченные значения x знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Также учтем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в ноль (они отмечены кружками). Теперь легко выписать решения неравенства: $0<x<\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\le x<\pi, \frac{7\pi}{6}\le x<\frac{3\pi}{2}$. Учитывая, что через $2\pi n$ (где $n\in Z$) ситуация повторяется, выпишем решения данного неравенства $x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $n\in Z$.

При наличии в неравенстве функций **тангенс и котангенс** удобно **перейти к функциям синус и косинус** и использовать рассмотренный метод интервалов.

Пример 6

Решим неравенство $\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin x}\ge 0$.

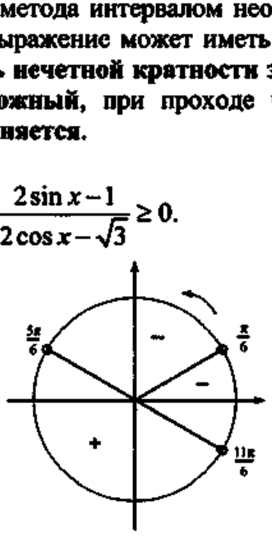


Учтем, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, и запишем неравенство в виде $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} \geq 0$. Отметим на единичной окружности значения x, при которых обращается в ноль числитель $\sin x - \cos x = 0$ (откуда $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{5\pi}{4}$) и знаменатель $\sin x \cos x = 0$ (тогда $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ и $x = 2\pi$) дроби. Определим знак данной дроби, например, при $x = \dfrac{\pi}{3}$ и получим $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} > 0$. Учтем, что при переходе через отмеченные значения x знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Учтем также значения x, при которых знаменатель дроби обращается в ноль (они отмечены кружками). С учетом периодичности функций синус и косинус, входящих в неравенство, запишем окончательное решение данного неравенства $x \in \left[\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

При использовании метода интервалом необходимо помнить, что тригонометрическое выражение может иметь **кратные корни**. При переходе через **корень нечетной кратности знак выражения меняется на противоположный**, при проходе через **корень четной кратности знак сохраняется.**

Пример 7

Решим неравенство $\dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} \geq 0$.



На единичной окружности отметим значения x, при которых обращается в ноль числитель $2\sin x - 1 = 0$ (откуда $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$) и знаменатель $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ (тогда $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{11\pi}{6}$). Учтем, что $x = \frac{\pi}{6}$ – корень второй (четной) кратности и при переходе через него знак дроби не меняется. Определим знак выражения, например, при $x = 0$ и получим $\frac{2\cdot 0 - 1}{2\cdot 1 - \sqrt{3}} < 0$. Построим диаграмму знаков данной дроби. Учтем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в ноль (они отмечены кружками). С учетом периодичности функций, входящих в неравенство, запишем его решения $x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

IV. Задание на уроке

№ 151 (б); 152 (а); 153 (а); 157 (г); 159 (а, б); 160 (а, в); 162 (а, б); 163 (а, в).

V. Задание на дом

№ 151 (а); 152 (г); 153 (в); 157 (в); 159 (в, г); 160 (б, г); 162 (в, г); 163 (б, г).

VI. Творческие задания

Решите неравенства:

1) $3\sin^2 x - 2\sin x - 1 \geq 0$;
2) $35\cos^2 x + 2\cos x - 1 < 0$;
3) $\sin x > \sqrt{5}\sin\frac{x}{2}$;
4) $\cos x < 1 + \cos 2x$;
5) $2\cos^4 5x \leq \frac{1}{2} + \cos 10x$;
6) $\cos 8x - 2{,}5 < 2\sqrt{3}\sin 4x$;
7) $\sqrt{2 - \operatorname{tg} x} > \operatorname{tg} x$;
8) $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1$;
9) $\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} > 1$;
10) $\frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x} < 2$.

Ответы: 1) $(2n-1)\pi + \arcsin\frac{1}{3} \leq x \leq 2\pi n - \arcsin\frac{1}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\pi(2n-1) + \arccos\frac{1}{5} < x < 2\pi n - \arccos\frac{1}{7}$,

$2\pi n + \arccos\frac{1}{7} < x < \pi(2n+1) - \arccos\frac{1}{5}$;

3) $2\pi(2n+1) < x < 2\pi(2n+2)$;

4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{\pi}{3}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi+2\pi n$;

5) $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{10}n$;

6) $x \neq (-1)^{n+2}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$;

7) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n$;

8) $-\frac{7}{6}\pi+2\pi n \le x \le \frac{\pi}{6}+2\pi n$;

9) $-\frac{3}{4}\pi-2\pi n, x < -\frac{\pi}{2}+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n$;

10) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < -\frac{\pi}{4}+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \pi n, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 48–49. Системы тригонометрических уравнений

Цель: рассмотреть наиболее типичные системы тригонометрических уравнений и способы их решения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите неравенство:

а) $3\sin^2 x-5\sin x+\cos^2 x+1 \le 1$;

б) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) \ge 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{2\sin 2x+\sqrt{2}} \ge 0$.

Вариант 2

Решите неравенство:

а) $\cos^2 x-5\cos x-\sin^2 x-2 \ge 0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le -1$;

в) $\frac{\operatorname{ctg}2x+\sqrt{3}}{2\cos x-1}\le 0$.

III. Изучение нового материала

На экзаменах системы тригонометрических уравнений встречаются гораздо **реже** тригонометрических уравнений и неравенств. Тем не менее подобные задачи бывают. Четкой **систематики** систем тригонометрических уравнений **не существует**. Поэтому условно разобьем их на группы и рассмотрим **способы решения** этих задач.

1. Простейшие системы уравнений

К таким системам отнесем системы, в которых или **одно** из уравнений **являются линейным**, или **уравнения** системы **могут быть решены независимо** друг от друга.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2} \\ 5+7\cos x=3\cos^2 y \end{cases}$.

Так как первое **уравнение** является **линейным**, то выразим из него переменную $x=\frac{\pi}{2}+y$ и подставим во второе уравнение: $5+7\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=3\cos^2 y$. Используем формулу приведения и основное тригонометрическое тождество. Получаем уравнение: $5-7\sin y=3(1-\sin^2 y)$ или $3\sin^2 y-7\sin y+2=0$. Введем новую переменную $t=\sin y$. Имеем квадратное уравнение $3t^2-7t+2=0$, корни которого $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2=2$ (не подходит, так как $\sin y\le 0$). Вернемся к старой неизвестной и получим уравнение $\sin y=\frac{1}{3}$, решение которого $y=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, где $n\in Z$. Теперь легко найти неизвестную $x=\frac{\pi}{2}+y=\frac{\pi}{2}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$. Итак, система уравнений имеет решения $\left(\frac{\pi}{2}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n;\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right)$, где $n\in Z$.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin(x-y)=0\\ \cos(x+y)=1\end{cases}$.

Уравнения системы независимы. Поэтому можно записать решения каждого уравнения. Получаем: $\begin{cases}x-y=\pi n\\ x+y=2\pi k\end{cases}$, где $n, k\in Z$. Почленно сложим и вычтем уравнения этой системы линейных уравнений и найдем $\begin{cases}2x=\pi(n+2k)\\ 2y=\pi(2k-n)\end{cases}$, откуда $x=\frac{\pi}{2}(n+2k)$, $y=\frac{\pi}{2}(2k-n)$.

Обратим внимание на то, что в силу независимости уравнений при нахождении $x-y$ и $x+y$ должны быть указаны разные целые числа n и k. Если бы вместо k было также поставлено n, то решения имели бы вид $x=\frac{3\pi}{2}n$, $y=\frac{\pi}{2}n$. При этом было бы **потеряно** бесконечное множество решений и, кроме того, возникла бы связь между переменными x и y: $x=3y$ (чего нет на самом деле). Например, легко проверить, что данная система имеет решение $x=5\pi$ и $y=\pi$ (в соответствии с полученными формулами), которое при $k=n$ найти **невозможно**. Поэтому будьте внимательнее.

2. Системы вида $\begin{cases}\cos x\cos y=a\\ \sin x\sin y=b\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x\cos y=a\\ \cos x\sin y=b\end{cases}$.

Такие системы приводятся к простейшим при сложении и вычитании уравнений. При этом получим системы: $\begin{cases}\cos(x+y)=a-b\\ \cos(x-y)=a+b\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin(x-y)=a+b\\ \sin(x+y)=a-b\end{cases}$. Отметим очевидное ограничение: $|a-b|\le 1$ и $|a+b|\le 1$. Само же решение подобных систем сложностей не представляет.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{4}\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Преобразуем сначала второе уравнение системы, используя равенство $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Получаем: $\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{1}{3}$. Подставим в числитель этой дроби первое уравнение $\dfrac{\frac{1}{4}}{\cos x\cos y}=\dfrac{1}{3}$ и выразим $\cos x\cos y=\dfrac{3}{4}$. Теперь имеем систему уравнений $\begin{cases}\cos x\cos y=\dfrac{3}{4}\\ \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Сложим и вычтем эти уравнения. Имеем: $\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=1\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

или $\begin{cases}\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Запишем решения этой простейшей системы $\begin{cases}x-y=2\pi n\\ x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\end{cases}$. Складывая и вычитая эти линейные уравнения, находим: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n)$, $y=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi(k-n)$, где $n, k\in Z$.

3. Системы вида: $\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\mp y=b\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=b\end{cases}$.

Такие системы можно рассматривать как **простейшие** и решать их соответствующим образом. Однако есть и другой способ решения: преобразовать сумму тригонометрических функций **в произведение** и использовать оставшееся уравнение.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x+\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

Сначала преобразуем первое уравнение, используя формулу для суммы синусов углов. Получаем $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Используя второе уравнение, имеем: $2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Выпишем решения этого уравнения:

$\frac{x-y}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$ (где $n\in Z$) и $x-y=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n$. С учетом второго уравнения данной системы получаем систему линейных уравнений $\begin{cases}x-y=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$. Из этой системы находим $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ y=\frac{\pi}{6}\mp\frac{\pi}{6}-2\pi n\end{cases}$. Такие решения удобно записать в более рациональном виде. Для верхних знаков получаем $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -2\pi n\right)$, для нижних знаков – $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{3}-2\pi n\right)$, $n\in Z$.

4. Системы вида $\begin{cases}a_1\sin x+b_1\sin y=c_1\\ a_2\cos x+b_2\cos y=c_2\end{cases}$ **или** $\begin{cases}a_1\sin x+b_1\cos y=c_1\\ a_2\cos x+b_2\sin y=c_2\end{cases}$.

Прежде всего необходимо получить уравнение, содержащее только **одну неизвестную**. Для этого, например, **выразим** из одного уравнения **sin** *y*, из другого – **cos** *y*. **Возведем в квадрат** эти соотношения и **сложим**. Тогда получается тригонометрическое уравнение, содержащее **неизвестную** *x*. Решаем такое уравнение. Затем, используя **любое уравнение** данной системы, получаем уравнение для нахождения неизвестной *y*.

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin y=\sin x\\ 3\cos x+\cos y=1\end{cases}$.

Запишем систему в виде $\begin{cases}\sin y=\sin x\\ \cos y=1-3\cos x\end{cases}$. Возведем в квадрат каждое уравнение системы и получим $\begin{cases}\sin^2 y=\sin^2 x\\ \cos^2 y=1-6\cos x+9\cos^2 x\end{cases}$.

Сложим уравнения этой системы: $1=\sin^2 x+1-6\cos x+9\cos^2 x$ или $0=\sin^2 x-6\cos x+9\cos^2 x$. Используя основное тригонометрическое тождество, запишем уравнение в виде $0=1-\cos^2 x-6\cos x+9\cos^2 x$ или $0=8\cos^2 x-6\cos x+1$. Решения этого уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$ (тогда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$) и $\cos x=\frac{1}{4}$ (откуда $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$), где $n, k\in Z$. Учитывая связь между неизвестными $\cos y=1-3\cos x$, получаем для $\cos x = \frac{1}{2}$ $\cos y = -\frac{1}{2}$; для $\cos x = \frac{1}{4}$ $\cos y = \frac{1}{4}$. Необходимо помнить, что при решении системы уравнений проводилось возведение в квадрат и эта операция могла привести к появлению посторонних корней. Поэтому надо учесть первое уравнение данной системы, из которого следует, что величины sin x и sin y должны быть одного знака.

С учетом описанного получаем решения данной системы уравнений $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)$ и $\left(\pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k;\ \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi l\right)$, где $n, m, k, l \in Z$. При этом для неизвестных x и y одновременно выбираются или верхние или нижние знаки.

В частном случае $|a_1| = |b_1|$ и $|a_2| = |b_2|$ система может быть решена **преобразованием суммы** (или разности) тригонометрических функций **в произведение** и последующим почленным **делением уравнений** друг на друга.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$.

В каждом уравнении преобразуем сумму и разность функций в произведение и разделим каждое уравнение на 2. Получаем $\begin{cases} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Так как ни один множитель в левых частях уравнений не равен нулю, то почленно разделим уравнения друг на друга (например, второе на первое). Получаем $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}$, откуда $\frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi n$ (где $n \in Z$). Подставим найденное значение $\frac{x-y}{2}$, например, в первое уравнение $\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \frac{1}{2}$.

Учтем, что $\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$. Тогда $\sin\frac{x+y}{2} = (-1)^n$, откуда $\frac{x+y}{2} = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Получили систему линейных уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ \dfrac{x-y}{2}=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, найдем $x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}+\pi(2k+n)$ и $y=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\pi(2k-n)$, где $k, n\in Z$.

5. Системы, решаемые с помощью замены неизвестных

Если система содержит только две тригонометрические функции или приводится к такому виду, что удобно использовать замену неизвестных.

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x-\sin y=3 \\ \operatorname{tg}^2 x+\sin^2 y=17 \end{cases}$.

Так как в данную систему входят только две тригонометрические функции, то введем новые переменные $a = \operatorname{tg} x$ и $b = \sin y$. Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases} a-b=3 \\ a^2+b^2=17 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $a = b + 3$ и подставим во второе: $(b+3)^2+b^2=17$ или $b^2+3b-4=0$. Корни этого квадратного уравнения $b_1 = 1$ и $b_2 = -4$. Соответствующие значения $a_1 = 4$ и $a_2 = -1$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы простейших тригонометрических уравнений:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=4 \\ \sin y=1 \end{cases}$, ее решение $x=\operatorname{arctg}4+\pi n$, $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, где $n, k\in Z$;

б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=-1 \\ \sin y=-4 \end{cases}$, решений не имеет, так как $\sin y\geq -1$.

Пример 8

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ \cos 2x-\cos 2y=1 \end{cases}$.

Преобразуем второе уравнение системы так, чтобы оно содержало только функции $\sin x$ и $\cos y$. Для этого используем формулы понижения степени. Получаем $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ (откуда $\cos 2x=1-2\sin^2 x$) и $\cos^2 y=\dfrac{1+\cos 2y}{2}$ (тогда $\cos 2y=2\cos^2 y-1$).

Второе уравнение системы имеет вид: $1-2\sin^2 x-(2\cos^2 y-1)=1$ или $\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}$. Получили систему тригонометрических уравнений $\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}\end{cases}$. Введем новые переменных $a=\sin x$ и $b=\cos y$. Имеем симметричную систему уравнений $\begin{cases}a+b=1\\ a^2+b^2=\frac{1}{2}\end{cases}$, единственное решение которой $a=b=\frac{1}{2}$. Вернемся к старым неизвестным и получим простейшую систему тригонометрических уравнений $\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos y=\frac{1}{2}\end{cases}$, решение которой $\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\end{cases}$, где $n, k\in Z$.

6. Системы, для которых важны особенности уравнений

Практически при решении любой системы уравнений используются те или иные ее особенности. В частности, один из наиболее общих приемов решения системы – тождественные преобразования, позволяющие получить уравнение, содержащее только одну неизвестную. Выбор преобразований, конечно, определяется спецификой уравнений системы.

Пример 9

Решим систему $\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\cos^3 y\\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2}\sin^3 y\end{cases}$.

Обратим внимание на левые части уравнений, например, на $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. Используя формулы приведения, сделаем из нее функцию с аргументом $\frac{\pi}{4}+x$. Получаем $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)=$ $=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. Тогда система уравнений имеет вид:

$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\cos^3 y \\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\sin^3 y \end{cases}$. Чтобы исключить переменную x, почленно умножим уравнения и получим: $1=8\cos^3 y\sin^3 y$ или $1=\sin^3 2y$, откуда $\sin 2y = 1$. Находим $2y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ и $y=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, где $n \in Z$.

Удобно отдельно рассмотреть случаи четных и нечетных значений n. Для четных n ($n = 2k$, где $k \in Z$) $y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$. Тогда из первого уравнения данной системы получаем $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$ и $x=\pi m$, где $m \in Z$. Для нечетных n ($n = 2k + 1$) $y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$. Тогда из первого уравнения имеем $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=-1$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi m$. Итак, данная система имеет решения: $\begin{cases} x=\pi m \\ y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi m \\ y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k+1) \end{cases}$, где $m, k \in Z$.

Как и в случае уравнений, достаточно часто встречаются системы уравнений, в которых существенную роль играет **ограниченность функций синус и косинус.**

Пример 10

Решим систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y \\ \sin^2 y+\cos^2 z=1 \end{cases}$.

Прежде всего преобразуем первое уравнение системы: $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=2\sin^2 y$, или $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2\sin^2 y$, или $\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2\sin^2 y$, или $\dfrac{4}{\sin^2 2x}-2=2\sin^2 y$, или $\dfrac{2}{\sin^2 2x}=1+\sin^2 y$. Учитывая ограниченность функции синус, видим, что левая часть уравнения не меньше 2, а правая часть – не больше 2. Поэтому такое уравнение равносильно условиям $\sin^2 2x = 1$ и $\sin^2 y = 1$.

Второе уравнение системы запишем в виде $\sin^2 y = 1 - \cos^2 z$ или $\sin^2 y = \sin^2 z$ и тогда $\sin^2 z = 1$. Получили систему простейших тригонометрических уравнений $\begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin^2 y = 1 \\ \sin^2 z = 1 \end{cases}$. Используя формулу понижения степени, запишем систему в виде: $\begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{2} = 1 \\ \dfrac{1-\cos 2y}{2} = 1 \\ \dfrac{1-\cos 2z}{2} = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos 4x = -1 \\ \cos 2y = -1 \\ \cos 2z = -1 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} 4x = \pi + 2\pi k \\ 2y = \pi + 2\pi n \\ 2z = \pi + 2\pi m \end{cases}$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$; $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, где $k, n, m \in Z$.

Разумеется, при решении других систем тригонометрических уравнений также необходимо обращать внимание на особенности этих уравнений.

7. Системы, содержащие обратные тригонометрические функции

Такие системы встречаются гораздо реже, чем системы уравнений с тригонометрическими функциями. Поэтому остановимся только на нескольких примерах и обратим внимание на особенности решения подобных систем.

Пример 11

Найти, при каких целых значениях k система уравнений имеет решения и найти все эти решения: $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = k\pi^2 \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Так как в эту систему входят только две обратные тригонометрические функции, то введем новые переменные: $a = \operatorname{arctg} x$ и

$b = \arccos y$. Тогда система имеет вид: $\begin{cases} a^2 + b^2 = k\pi^2 \\ a + b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Найдем возможные значения k. Учитывая области изменения функций $\operatorname{arctg} x$ и $\arccos y$, получим $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $b \in [0; \pi]$. Отсюда имеем $0 \le a^2 < \dfrac{\pi^2}{4}$ и $0 \le b^2 \le \pi^2$. Сложив эти неравенства одного знака, получим $0 \le a^2 + b^2 < \dfrac{5\pi^2}{4}$. Учитывая первое уравнение системы, получаем $0 \le k\pi^2 < \dfrac{5\pi^2}{4}$ или $0 \le k < \dfrac{5}{4}$. В промежуток $\left[0; \dfrac{5}{4}\right)$ входят два целых значения $k = 0$ и $k = 1$. Рассмотрим два этих случая:

а) при $k = 0$ система имеет вид $\begin{cases} a^2 + b^2 = 0 \\ a + b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ и решений не имеет;

б) при $k = 1$ система принимает вид $\begin{cases} a^2 + b^2 = \pi^2 \\ a + b = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Из второго уравнения выразим $b = \dfrac{\pi}{2} - a$ и подставим в первое. Имеем: $a^2 + \left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)^2 = \pi^2$ или $8a^2 - 4\pi a - 3\pi^2 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $a = \pi\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$. Очевидно, что корень $a = \pi\dfrac{1 + \sqrt{7}}{4}$ не подходит, так как $\pi\dfrac{1 + \sqrt{7}}{4} > \dfrac{\pi}{2}$. Для значения $a = \pi\dfrac{1 - \sqrt{7}}{4}$ найдем $b = \pi\dfrac{1 + \sqrt{7}}{4}$ (очевидно, что $0 \le b \le \pi$). Вернемся к старым неизвестным и получим систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \pi\dfrac{1 - \sqrt{7}}{4} \\ \arccos x = \pi\dfrac{1 + \sqrt{7}}{4} \end{cases}$, которая имеет единственное решение $x=\operatorname{tg}\left(\pi\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $y=\cos\left(\pi\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$.

Итак, только при $k=1$ данная система уравнений имеет единственное решение $x=\operatorname{tg}\left(\pi\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $y=\cos\left(\pi\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$.

На экзаменах встречаются также системы уравнений, содержащие обратные и прямые тригонометрические функции. Рассмотрим пример такой **смешанной** системы.

Пример 12

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+2x\sin y+3\cos y=0 \\ \arcsin\left(\frac{x}{2}+\sin y\right)=y-\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Учитывая область изменения функции арксинус, из второго уравнения получаем неравенство $-\frac{\pi}{2}\le y-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$. Оттуда $-\frac{\pi}{6}\le y\le\frac{5\pi}{6}$.

По определению функции арксинус из второго уравнения имеем: $\frac{x}{2}+\sin y=\sin\left(y-\frac{\pi}{3}\right)$, или $\frac{x}{2}+\sin y=\sin y\cos\frac{\pi}{3}-\cos y\sin\frac{\pi}{3}$, или $\frac{x}{2}+\sin y=\frac{1}{2}\sin y-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y$, откуда выразим $x=-\sin y-\sqrt{3}\cos y$.

Подставим это соотношение в первое уравнение данной системы. Получаем: $(-\sin y-\sqrt{3}\cos y)^2+2(-\sin y-\sqrt{3}\cos y)\sin y+3\cos y=0$ или $-\sin^2 y+3\cos^2 y+3\cos y=0$. Используя основное тригонометрическое тождество, имеем уравнение $4\cos^2 y+3\cos y-1=0$. Решения этого уравнения: $\cos y=-1$ (тогда $y=\pi+2\pi k$, где $k\in Z$) и $\cos y=\frac{1}{4}$ (откуда $y=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$). Из всех найденных решений условию $y\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ удовлетворяет только значение $y=\arccos\frac{1}{4}$. Определим $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ и найдем $x=-\sin y-\sqrt{3}\cos y=-\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$. Таким образом, данная система уравнений имеет единственное решение $x=-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$ и $y=\arccos\frac{1}{4}$.

IV. Задание на уроке

№ 175 (а, б); 176 (в, г).

V. Задание на дом

№ 175 (в, г); 176 (а, б).

VI. Творческие задания

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\cos x+\cos y=\sqrt{3}\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$;

2) $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{2}\\ x+y=\frac{7\pi}{3}\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x+y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$;

4) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ x+y=\frac{\pi}{6}\end{cases}$;

5) $\begin{cases}\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos(x-y)=-\frac{1}{2}\end{cases}$;

6) $\begin{cases}\sin(x-y)=\frac{1}{2}\\ \sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$;

7) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \cos x\cos y=\frac{1}{4}\end{cases}$;

8) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2\sqrt{3}\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3\end{cases}$;

9) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$;

10) $\begin{cases}\cos x-\sin y=1\\ \cos^2 x-\sin^2 y=1\end{cases}$;

11) $\begin{cases}\sin x\cos y=\frac{1}{2}\\ \cos x\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}$;

12) $\begin{cases}\cos x\cos y=1\\ \sin x\sin y=0\end{cases}$;

13) $\begin{cases}\sqrt{\cos x}\cdot\sin y=0\\ 2\cos^2 x+\cos 2y=2\end{cases}$;

14) $\begin{cases}\sqrt{-\sin x}\cdot\operatorname{tg} y=0\\ \sin^2 x+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=1\end{cases}$;

15) $\begin{cases}2\cos x+a\sin y=1\\ 3\cos x+\sin y=2\end{cases}$;

16) $\begin{cases}-a\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} y=2a+3\\ 9\operatorname{tg} x-a\operatorname{ctg} y=3a+2\end{cases}$;

17) $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 n \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}, \text{ где } n \in Z \end{cases}$;

18) $\begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = \dfrac{\pi^2}{4} n \\ (\arcsin y)^2 \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^4}{16}, \text{ где } n \in Z \end{cases}$.

Ответы: 1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$;

2) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(3 - n)$;

3) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ y = -2\pi n;\ \ x = -2\pi n,\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

4) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ y = -\pi n;\ \ x = -\pi n,\ y = \frac{\pi}{6} + \pi n$;

5) $x = \pi(m + n) \pm \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3},\ y = \pi(m - n) \pm \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{3}$;

6) $x = \frac{\pi}{2}(m + n) + (-1)^m \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{12},\ y = \frac{\pi}{2}(m - n) + (-1)^m \frac{\pi}{6} - (-1)^n \frac{\pi}{12}$;

7) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

8) $x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n$;

9) $x = \pi m + (-1)^m \frac{\pi}{4},\ y = 2\pi n \pm \frac{3\pi}{4};\ \ x = \pi m + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4},\ y = 2\pi n \pm \frac{\pi}{4}$;

10) $x = 2\pi m,\ y = \pi n$;

11) $x = \pi\left(m + \frac{n}{2}\right) + \frac{\pi}{4},\ y = \pi\left(\frac{n}{2} - m\right) - \frac{\pi}{4}$;

12) $x = \pi(m + n),\ y = \pi(m - n)$;

13) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ y = \pi m$;

14) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ y = \pi m$;

15) $x = \pm\arccos\frac{1-2a}{2-3a} + 2\pi n,\ y = (-1)^m \arcsin\frac{1}{2-3a} + \pi m$ при

$a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; \infty);\ x, y \in \varnothing$ при $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$;

16) $x = \operatorname{arctg}\frac{2a+1}{4-a} + \pi n,\ y = \operatorname{arcctg}\frac{3(a+2)}{4-a} + \pi m$ при $|a| \neq 4$; $x = t$, $y = \operatorname{arcctg}(5 + 2\operatorname{tg} t) + \pi n$, t – любое действительное число, кроме

$t = \frac{\pi}{2} + \pi m$, при $a = -4$; $x, y \in \varnothing$ при $a = 4$;

17) при $n = 1$ $x = \operatorname{tg}\frac{\pi(1-\sqrt{7})}{4},\ y = \cos\frac{\pi(1+\sqrt{7})}{4}$;

18) при $n = 2$ $x = \cos\frac{\pi^2}{4},\ y = \pm 1$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 50–51. Контрольная работа по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

Вариант 1

1. Вычислите: $\operatorname{arctg} 1 + \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решите уравнение:

а) $\sin 3x = 1$; б) $2\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

3. Решите неравенство:

а) $\cos x \geq 0$; б) $2\sin^2 x - \sin x \leq 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin(x-y) = 0 \\ \cos(x+y) = 1 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Вычислите: $\operatorname{arcctg} 1 + \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Решите уравнение:

а) $\cos 5x = 1$; б) $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

3. Решите неравенство:

а) $\sin x \leq 0$; б) $2\cos^2 x + \cos x \leq 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos(x-y) = 0 \\ \sin(x+y) = 1 \end{cases}$.

Вариант 3

1. Вычислите: $\sin\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $\arcsin^2 x - \arcsin x - 2 = 0$; б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

3. Решите неравенство:

а) $\arcsin x \le \frac{\pi}{3}$; б) $\sin x + \cos x > 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$.

Вариант 4

1. Вычислите: $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3} - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - 5 = 0$; б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

3. Решите неравенство:

а) $\arccos x \ge \frac{\pi}{6}$; б) $\sin x - \cos x < 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0 \\ \sin x \sin y = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Вариант 5

1. Вычислите: $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{4}{5}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$; б) $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 1$.

3. Решите неравенство:

а) $\cos(\arcsin x) \ge \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} x(2\sin x - 1) \le 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sin x\cos y = \frac{1}{2} \\ \cos x\sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Вариант 6

1. Вычислите: $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$.

3. Решите неравенство:

а) $\sin(\arccos x) \geq \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{ctg} x(2\cos x + 1) \geq 0$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Урок 52. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $\frac{5\pi}{12}$.

2. *Ответ*:

а) $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$; б) $\frac{\pi}{20}\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2}{3}\pi n$.

3. *Ответ*:

а) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$; б) $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$.

4. *Ответ*: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}n+\pi k\right)$, где $n,k\in Z$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $\frac{7\pi}{12}$.

2. *Ответ*:

а) $\frac{2}{5}\pi n$; б) $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}n$.

3. *Ответ*:

а) $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$.

4. *Ответ*: $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}n+\pi k;\ \pi k-\frac{\pi}{2}n\right)$, где $n,k\in Z$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $\frac{24}{25}$.

2. *Ответ*:

а) $-\sin 1$; б) $\frac{\pi}{2}n;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

3. *Ответ*:

а) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$.

4. *Ответ*: $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$; $\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$,

где $n,k\in Z$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $\frac{7}{25}$.

2. *Ответ*:

а) $-3\operatorname{tg}1$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

3. *Ответ*:

а) $\left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$.

4. *Ответ*: $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n; (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$; $\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n; (-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, где $n,k\in Z$.

Решения

Вариант 5

1. Пусть $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$ (тогда $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) и $\beta=\arccos\frac{4}{5}$ (тогда $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $\beta\in[0; \pi]$). Найдем $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\sin\beta=\frac{3}{5}$. Теперь вычислим $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)=\sin(\alpha-\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0$.

Ответ: 0.

2а) Для решения уравнения будем считать $\alpha=\arcsin x=$ $=\arccos\sqrt{1-x^2}$. Очевидно, что $\alpha\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sin\alpha=x$ и $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. Возведем каждое равенство в квадрат и получим: $\sin^2\alpha=x^2$ и $\cos^2\alpha=1-x^2$. Сложим эти равенства. Имеем $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Такое равенство является тождеством. Так как $\alpha\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x=\sin\alpha$, то $x\in[0; 1]$. Этот промежуток является решением данного уравнения.

Ответ: [0; 1].

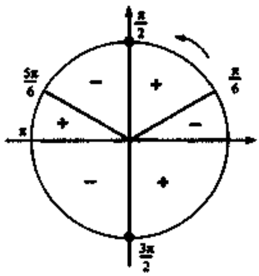
2б) Запишем данное уравнение в виде: $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=$ $=\sin^2 x+\cos^2 x$ или $\sin^2 x+5\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$. Для решения этого однородного уравнения разделим все его члены на $\cos^2 x$ и получим: $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 4 = 0$. Введем новую переменную $t = \operatorname{tg} x$. Имеем квадратное уравнение $t^2 + 5t + 4 = 0$, корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = -4$. Вернемся к старой переменной и получим простейшие тригонометрические уравнения: $\operatorname{tg} x = -1$ (решения $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$) и $\operatorname{tg} x = -4$ (решения $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, где $k \in Z$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, где $n, k \in Z$.

3а) Обозначим $\alpha = \arcsin x$ и получим неравенство $\cos\alpha \ge \frac{1}{2}$. Его решения $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le \alpha \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. По определению арксинуса $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому подходит только $n = 0$ и $-\frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\pi}{3} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{3}$. Учтем, что функция синус возрастающая на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Получаем $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \le \sin(\arcsin x) \le \sin\frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

3б) Используем метод интервалов. Найдем точки, в которых $\operatorname{tg} x = 0$ ($x = 0$ и $x = \pi$) или $\operatorname{tg} x$ не существует ($x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$) и $\sin x = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$). Отметим эти точки на тригонометрическом круге. Определим знак данного выражения, например, при $x = \frac{\pi}{4}$ и получим $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{4} - 1\right) = \sqrt{2} - 1 > 0$. Выпишем решение данного неравенства: $x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.



Ответ: $\left[2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

4. Сложим и вычтем уравнения системы и получим: $\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=0\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin(x+y)=0\\ \sin(x-y)=1\end{cases}$. Решения этой системы $\begin{cases}x+y=\pi n\\ x-y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}$. Сложим и вычтем эти уравнения и найдем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n+\pi k$ и $y=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n-\pi k$, где $n, k \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n-\pi k\right)$ где $n, k \in Z$.

Вариант 6

1. Пусть $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$ (тогда $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) и $\beta=\arccos\frac{4}{5}$ (тогда $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $\beta\in[0; \pi]$). Найдем $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\sin\beta=\frac{3}{5}$. Теперь вычислим $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=$ $=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$.

Ответ: $\frac{7}{25}$.

2а) Для решения уравнения будем считать $\alpha=\arccos x=$ $=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Очевидно, что $\alpha\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\cos\alpha=x$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Найдем $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Таким образом, данное уравнение является тождеством. Так как $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha = x$, то $x \in (0; 1]$. Этот промежуток является решением данного уравнения.

Ответ: (0; 1].

2б) Запишем данное уравнение в виде: $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$. Для решения этого однородного уравнения разделим все его члены на $\cos^2 x$ и получим: $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg}x + 2 = 0$. Введем новую переменную $t = \operatorname{tg}x$. Имеем квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Вернемся к старой переменной и получим простейшие тригонометрические уравнения: $\operatorname{tg}x = 1$ (решения $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$) и $\operatorname{tg}x = 2$ (решения $x = \operatorname{arctg}2 + \pi k$, где $k \in Z$).

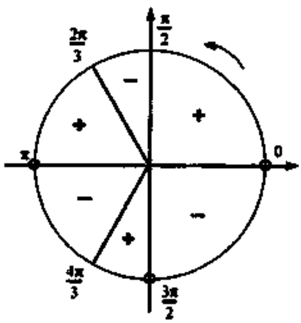
Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg}2 + \pi k$, где $n, k \in Z$.

3а) Обозначим $\alpha = \arccos x$ и получим неравенство $\sin\alpha \geq \dfrac{1}{2}$. Его решения $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \alpha \leq \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$. По определению арккосинуса $\alpha \in [0; \pi]$. Поэтому подходит только $n = 0$ и $\dfrac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \dfrac{5\pi}{6}$ или $\dfrac{\pi}{6} \leq \arccos x \leq \dfrac{5\pi}{6}$. Учтем, что функция косинус убывающая на промежутке [0; π]. Получаем $\cos\dfrac{\pi}{6} \geq \cos(\arccos x) \geq \cos\dfrac{\pi}{6}$ или $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \geq x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

3б) Используем метод интервалов. Найдем точки, в которых $\operatorname{ctg}x = 0$ ($x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = \dfrac{3\pi}{2}$) или $\operatorname{ctg}x$ не существует ($x = 0$ и $x = \pi$) и $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ ($x = \dfrac{2\pi}{3}$ и $x = \dfrac{4\pi}{3}$). Отметим эти точки на тригонометрическом круге.

Определим знак данного выражения, например, при $x=\frac{\pi}{4}$ и получим $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\left(2\cos\frac{\pi}{4}+1\right)=\sqrt{2}+1>0$. Выпишем решение данного неравенства: $x\in\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, где $n\in Z$.



Ответ: $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, где $n\in Z$.

4. Сложим и вычтем уравнения системы и получим: $\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=0\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos(x+y)=0\\ \cos(x-y)=1\end{cases}$. Решения этой системы $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ x-y=2\pi k\end{cases}$. Сложим и вычтем эти уравнения и найдем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n+\pi k$ и $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n-\pi k$, где $n,\ k\in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n-\pi k\right)$ где $n,\ k\in Z$.

Уроки 53–54. Зачетная работа по теме «Тригонометрические функции»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка 3 ставится за 6 баллов, оценка 4 – за 10 баллов, оценка 5 – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Постройте график функции $y = |x-1| + 2$.

2. Найдите область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-4}$.

3. Найдите период функции $y = 3\sin 0,5x + 2\operatorname{tg} 2x$.

4. Решите уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

5. Решите уравнение $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

6. Решите неравенство $7\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \geq 0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \cos(y-x) = 1 \end{cases}$.

В

8. Постройте график функции $y = 2\sqrt{1-\sin^2 x} - \cos x$.

9. Найдите наибольшее значение функции

$y=\sqrt{3\sin^2 x-\sin x+\cos^2 x+7}$.

10. Решите уравнение $(\sin x-\cos x)^2\sqrt{4-x^2}=0$.

11. Найдите tg$8x$, если числа cos$5x$, cos$7x$, cos$9x$ в указанном порядке являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

С

12. Найдите множество значений функции

$y=\frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{4}\right)$.

13. Решите уравнение $\sqrt{5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x}+\sqrt{3}\sin x=0$.

14. Решите уравнение $\sin x+\sin(a+x)+\sin(a-x)=2$.

Вариант 2

А

1. Постройте график функции $y=|x+2|-1$.

2. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{7-x}}{1-x^2}$.

3. Найдите период функции $y=4\cos 0{,}4x-3\operatorname{ctg} 2x$.

4. Решите уравнение $3\sin x+5\cos x=0$.

5. Решите уравнение $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$.

6. Решите неравенство $8\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\le 0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin(x-y)=1\end{cases}$.

В

8. Постройте график функции $y=\sqrt{1-\cos^2 x}+2\sin x$.

9. Найдите наибольшее значение функции

$y=\sqrt[3]{4\sin^2 x+2\sin x+2\cos^2 x+5}$.

10. Решите уравнение $(\sin x+\cos x)^3\sqrt{1-x^2}=0$.

11. Найдите tg$24x$, если числа cos$2x$, cos$8x$, cos$14x$ в указанном порядке являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

С

12. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right).$$

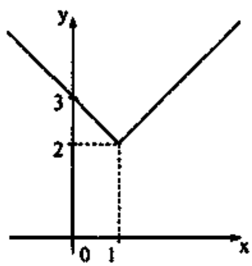
13. Решите уравнение $\sqrt{-\sin^2 x-3-3\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{3}\cos x$.

14. Решите уравнение $\sin x+\cos(a+x)+\cos(a-x)=2$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. График функции $y=|x-1|+2$ получается из графика функции $y=|x|$ его смещением на 1 единицу вправо и на 2 единицы вверх.



Ответ: см. график.

2. Область определения функции задается условиями $\begin{cases}5-x\ge 0\\ x^2-4\ne 0\end{cases}$, откуда $\begin{cases}x\le 5\\ x\ne \pm 2\end{cases}$, то есть $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;5]$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;5]$.

3. Период функции $y_1=3\sin 0{,}5x$ равен $T_1=\frac{2\pi}{0{,}5}=4\pi$, период функции $y=2\operatorname{tg}2x$ равен $T_2=\frac{\pi}{2}$. Тогда период данной функции составляет $T=T_1=4\pi$.

Ответ: 4π.

4. Для решения однородного уравнения $2\sin x+3\cos x=0$ разделим все его члены на $\cos x$ и получим $2\operatorname{tg}x+3=0$, откуда $\operatorname{tg}x=-\frac{3}{2}$ и

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right)+\pi n=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ \text{где } n\in Z.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$, где $n\in Z$.

5. Найдем $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $3x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}n$, где $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}n$, где $n\in Z$.

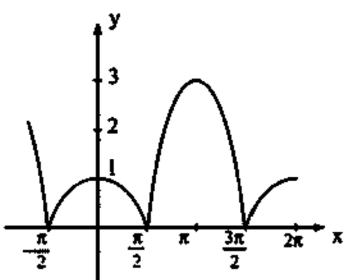
6. Очевидно, что данное неравенство равносильно неравенству $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geq 0$. Его решение $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $-\frac{\pi}{6}+\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n\in Z$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, где $n\in Z$.

7. Запишем решения каждого уравнения системы $\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\pi n\\ y-x=2\pi k\end{cases}$. Из первого уравнения найдем $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$, из второго уравнения определим $y=x+2\pi k=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n+2\pi k$, где $n, k\in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n+2\pi k\right)$, где $n, k\in Z$.

8. Представим данную функцию в виде $y=2|\cos x|-\cos x$ и раскроем знак модуля. Получаем $y=\begin{cases}\cos x,\ \text{если}\ \cos x\geq 0\\ -3\cos x,\ \text{если}\ \cos x<0\end{cases}$.



Сначала построим график функции $y=\cos x$. При $\cos x\geq 0$ этот график сохраняется. При $\cos x<0$ график функции $y=\cos x$ симметрично отражается вверх относительно оси абсцисс и растягивается в 3 раза вдоль оси ординат.

Ответ: см. график.

9. Данная функция будет иметь наибольшее значение, если подкоренное выражение $f(x)=3\sin^2 x-\sin x+\cos^2 x+7$ будет наибольшим. Запишем его в виде $f(x)=2\sin^2 x-\sin x+8$. Введем новую переменную $t=\sin x$, где $t\in[-1;\,1]$. Теперь исследуем квадратичную функцию $f(x)=2t^2-t+8$ на промежутке $[-1;\,1]$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, направленная ветвями вверх. Поэтому наименьшее значение функция имеет при $t=\dfrac{1}{4}$ и оно равно $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\cdot\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}+8=\dfrac{63}{8}$. Наибольшее значение функция имеет при $t=-1$ и оно равно $f(-1)=2+1+8=11$. Тогда наибольшее значение самой функции $y(x)$ равно $\sqrt{11}$.

Ответ: $\sqrt{11}$.

10. Решим данное уравнение. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а остальные определены. Получаем два случая.

а) $\begin{cases}\sin x-\cos x=0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}\operatorname{tg} x=1\\ -2<x<2\end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $x=\dfrac{\pi}{4}$.

б) $4-x^2=0$. Решения этого уравнения $x=\pm2$.

Таким образом, данное уравнение имеет три корня.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$; ±2.

11. Учтем, что данные числа образуют геометрическую прогрессию, и запишем ее свойство: $\cos^2 7x=\cos 5x\cos 9x$. В левой части используем формулу понижения степени, в правой части преобразуем произведение функций в сумму. Получаем $\dfrac{1+\cos 14x}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos 4x+\cos 14x)$, откуда $\cos 4x=1$. Решения этого уравнения $4x=2\pi n$, где $n\in Z$. Тогда $\operatorname{tg}8x=\operatorname{tg}4\pi n=0$.

Ответ: 0.

12. Используем метод введения вспомогательного угла и преобразуем функцию: $y=\dfrac{12}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt2}\cos x\right)-\dfrac{1}{4}\right)=$

$=\frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\right)$. Учтем, что функция арксинус возрастающая и запишем неравенства: $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, $-\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{3}{4}$. $-1\le\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\le\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\right)\le\frac{\pi}{6}$, тогда $-6\le y\le 2$. Таким образом, множество значений данной функции $E(y)=[-6;2]$.

Ответ: $[-6; 2]$.

13. Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x}=-\sqrt{3}\sin x$. Учтем, что $\sin x\le 0$, и возведем обе части уравнения в квадрат: $5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x=3\sin^2 x$. Запишем его в виде: $5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x=3(1-\cos^2 x)$ или $3\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$. Введем новую переменную $t=\cos x$ и получим квадратное уравнение $2t^2-3\sqrt{2}t+2=0$, корни которого $t_1=\sqrt{2}$ (не подходит, так как $t\le 1$) и $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вернемся к старой переменной и получим систему

$\begin{cases}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x\le 0\end{cases}$. Решения этой системы $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

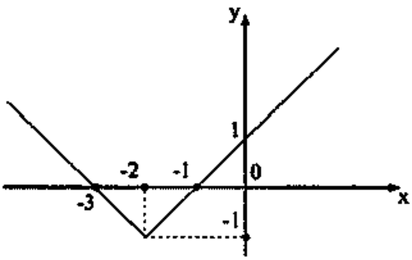
14. Преобразуем сумму двух последних функций в произведение $\sin x+2\sin a\cos x=2$. Используем метод введения вспомогательного угла. Разделим все члены уравнения на $\sqrt{1+4\sin^2 a}$. Получаем: $\frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}\sin x+\frac{2\sin a}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$. Будем считать, что $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$ и $\sin\varphi=\frac{2\sin a}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$, тогда $\operatorname{tg}\varphi=2\sin a$ и $\varphi=\operatorname{arctg}(2\sin a)$. Уравнение имеет вид $\sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$, решения которого $x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}+\pi n$ и $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}+\pi n-\operatorname{arctg}(2\sin a)$, где $a\in Z$. При этом

должно выполняться неравенство $\dfrac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} \le 1$. Решим его и получим: $2 \le \sqrt{1+4\sin^2 a}$ или $4 \le 1 + 2(1-\cos 2a)$ или $\cos 2a \le -\dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2a \le \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, и $a \in \left[\dfrac{\pi}{3} + \pi k; \dfrac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, где $k \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} + \pi n - \operatorname{arctg}(2\sin a)$ при $a \in \left[\dfrac{\pi}{3} + \pi k; \dfrac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, где $n, k \in Z$.

Вариант 2

1. График функции $y = |x+2| - 1$ получается из графика функции $y = |x|$ его смещением на 2 единицы влево и на 1 единицу вниз.



Ответ: см. график.

2. Область определения функции задается условиями $\begin{cases} 7 - x \ge 0 \\ 1 - x^2 \ne 0 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x \le 7 \\ x \ne \pm 1 \end{cases}$, то есть $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 7]$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 7]$.

3. Период функции $y_1 = 4\cos 0,4x$ равен $T_1 = \dfrac{2\pi}{0,4} = 5\pi$, период функции $y = 3\operatorname{ctg} 2x$ равен $T_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда период данной функции составляет $T = T_1 = 5\pi$.

Ответ: 5π.

4. Для решения однородного уравнения $3\sin x + 5\cos x = 0$ разделим все его члены на $\cos x$ и получим $3\operatorname{tg} x + 5 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{3}$ и

$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{3}\right) + \pi n = -\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, где $n \in Z$.

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, где $n \in Z$.

5. Найдем $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $2x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и

$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, где $n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, где $n \in Z$.

6. Очевидно, что данное неравенство равносильно неравенству $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \le 0$. Его решение $-\pi + 2\pi n \le 4x - \frac{\pi}{4} \le 2\pi n$, откуда

$-\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n \le x \le \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$.

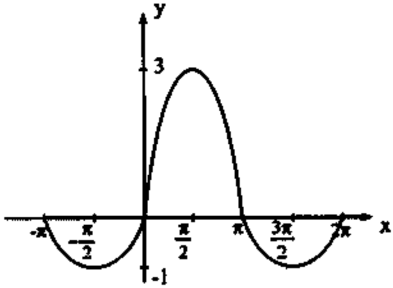
Ответ: $\left[-\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n \le x \le \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n\right]$, где $n \in Z$.

7. Запишем решения каждого уравнения системы $\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$.

Из первого уравнения найдем $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n$, из второго уравнения определим $y = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi k = -\frac{5\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n - 2\pi k$, где $n, k \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n; -\frac{5\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n - 2\pi k\right)$, где $n, k \in Z$.

8. Представим данную функцию в виде $y = |\sin x| + 2\sin x$ и раскроем знак модуля. Получаем $y = \begin{cases} 3\sin x, \text{ если } \sin x \ge 0 \\ \sin x, \text{ если } \sin x < 0 \end{cases}$.



Сначала построим график функции $y = \sin x$. При $\sin x < 0$ этот график сохраняется. При $\sin x \geq 0$ график функции $y = \sin x$ растягивается в 3 раза вдоль оси ординат.

Ответ: см. график.

9. Данная функция будет иметь наибольшее значение, если подкоренное выражение $f(x) = 4\sin^2 x + 2\sin x + 2\cos^2 x + 5$ будет наибольшим. Запишем его в виде $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x + 7$. Введем новую переменную $t = \sin x$, где $t \in [-1; 1]$. Теперь исследуем квадратичную функцию $f(x) = 2t^2 + 2t + 7$ на промежутке $[-1;\ 1]$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, направленная ветвями вверх. Поэтому наименьшее значение функция имеет при $t = -\frac{1}{2}$ и оно равно $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 7 = \frac{13}{2}$. Наибольшее значение функция имеет при $t = 1$ и оно равно $f(1) = 2 + 2 + 7 = 11$. Тогда наибольшее значение самой функции $y(x)$ равно $\sqrt[3]{11}$.

Ответ: $\sqrt[3]{11}$.

10. Решим данное уравнение. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а остальные определены. Получаем два случая.

а) $\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $x = -\frac{\pi}{4}$.

б) $1 - x^2 = 0$. Решения этого уравнения $x = \pm 1$.

Таким образом, данное уравнение имеет три корня.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$; ± 1.

11. Учтем, что данные числа образуют геометрическую прогрессию, и запишем ее свойство: $\cos^2 8x = \cos 2x \cos 14x$. В левой части используем формулу понижения степени, в правой части преобразуем произведение функций в сумму. Получаем $\frac{1+\cos 16x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 16x)$, откуда $\cos 12x = 1$. Решения этого уравнения $12x = 2\pi n$, где $n \in Z$. Тогда $\mathrm{tg} 24x = \mathrm{tg} 4\pi n = 0$.

Ответ: 0.

12. Используем метод введения вспомогательного угла и преобразуем функцию: $y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\right) = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Учтем, что функция арккосинус убывающая и запишем неравенства: $-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$, $-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{4}$. $\frac{1}{2} \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$, $\frac{\pi}{2} \ge \arccos\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \ge 0$, тогда $3 \ge y \ge 0$. Таким образом, множество значений данной функции $E(y) = [0; 3]$.

Ответ: [0; 3].

13. Для уравнения $\sqrt{-\sin^2 x - 3 - 3\sqrt{3}\sin x} = \sqrt{3}\cos x$, очевидно, $\cos x \ge 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $-\sin^2 x - 3 - 3\sqrt{3}\sin x = 3\cos^2 x$. Запишем его в виде: $-\sin^2 x - 3 - 3\sqrt{3}\sin x = 3(1 - \sin^2 x)$ или $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x - 6 = 0$. Введем новую переменную $t = \sin x$ и получим квадратное уравнение $2t^2 - 3\sqrt{3}t - 6 = 0$, корни которого $t_1 = 2\sqrt{3}$ (не подходит, так как $t \le 1$) и $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вернемся к старой переменной и получим систему $\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$. Решения этой системы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

14. Преобразуем сумму двух последних функций в произведение $\sin x + 2\cos a \cos x = 2$. Используем метод введения вспомогательного угла. Разделим все члены уравнения на $\sqrt{1 + 4\cos^2 a}$. Получаем:

$\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\sin x+\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$. Будем считать, что $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$ и $\sin\varphi=\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, тогда $\operatorname{tg}\varphi=2\cos a$ и $\varphi=\operatorname{arctg}(2\cos a)$. Уравнение имеет вид $\sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, решения которого $x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi n$ и $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi n-\operatorname{arctg}(2\cos a)$.

При этом должно выполняться неравенство $\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\le 1$. Решим его и получим: $2\le\sqrt{1+4\cos^2 a}$ или $4\le 1+2(1+\cos 2a)$ или $\cos 2a\ge\frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{3}+2\pi k\le 2a\le\frac{\pi}{3}+2\pi k$, и $a\in\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, где $k\in Z$.

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi n-\operatorname{arctg}(2\cos a)$ при $a\in\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, где $n, k\in Z$.

II полугодие

Глава II
Производная и ее применения

§ 4. Производная

Урок 55. Приращение функции

Цель: рассмотреть понятие приращения функции, получить навыки нахождения приращения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Во многих физических процессах представляет интерес не значение некоторой величины, а ее **изменение**. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа является изменением энергии тела; средняя скорость – отношение перемещения к промежутку времени, за которое оно было совершено, и т. д.

Часто приходится сравнивать значение функции f в некоторой фиксированной точке x_0 и значение функции в различных точках x, расположенных в окрестности точки x_0. При этом удобно выражать **приращение функции** $f(x) - f(x_0)$ через **приращение аргумента** $x - x_0$. Поясним смысл таких величин.

Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента** (или **приращением независимой переменной**) в точке x_0 и обозначают Δx, то есть $\Delta x = x - x_0$ (откуда следует, что $x = x_0 + \Delta x$). При этом говорят, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx.

Вследствие изменения аргумента, очевидно, изменилась также и функция на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Такая разность называется **приращением функции** f в точке x_0, соответствующим приращению Δx аргумента, и обозначается символом Δf (читается «дельта эф»), то есть $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (при этом $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$). Величину Δf называют также **приращением зависимой переменной** для функции $y = f(x)$ и обозначают Δy. Обратим внимание на то, что при фиксированном x_0 приращение Δf является **функцией**, зависящей от Δx.

Пример 1

Найдем приращения аргумента Δx и функции Δf в точке $x_0 = 3$, если $f(x) = 3x^2$ и:

а) $x = 2{,}9$; б) $x = 3{,}1$.

Используя рассмотренные понятия, получим:

а) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}9 - 3 = -0{,}1$; $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 3 \cdot 2{,}9^2 - 3 \cdot 3^2 =$

$= 3(2{,}9^2 - 3^2) = 3(2{,}9 - 3)(2{,}9 + 3) = 3 \cdot (-0{,}1) \cdot 5{,}9 = -1{,}77$;

б) $\Delta x = x - x_0 = 3{,}1 - 3 = 0{,}1$; $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 3 \cdot 3{,}1^2 - 3 \cdot 3^2 =$

$= 3(3{,}1^2 - 3^2) = 3(3{,}1 - 3)(3{,}1 + 3) = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 6{,}1 = 1{,}83$.

Пример 2

Найдем приращение Δf функции $f(x)$ в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx и:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \sin x$.

Используя понятие приращения функции, получим:

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{(x_0 + \Delta x)^2} - \dfrac{1}{x_0^2} = \dfrac{x_0^2 - (x_0 + \Delta x)^2}{(x_0 + \Delta x)^2 x_0^2} =$

$= \dfrac{x_0^2 - x_0^2 - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{(x_0 + \Delta x)^2 x_0^2} = -\dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{(x_0 + \Delta x)^2 x_0^2}$;

б) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$

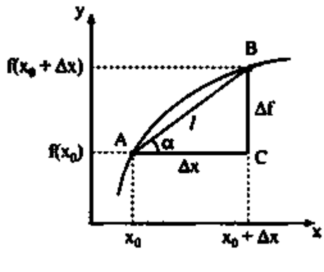
$= 2\sin\dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{2} \cdot \cos\dfrac{(x_0 + \Delta x) + x_0}{2} = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

Пример 3

Дан квадрат со стороной a. Найдем погрешность ΔS, допущенную при вычислении площади $S = a^2$ этого квадрата, если погрешность при измерении стороны квадрата равна Δx.

По определению приращения аргумента $x = a + \Delta x$, тогда приращение функции $\Delta S = S(x) - S(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$.

Обсудим геометрический смысл введенных понятий приращений аргумента и функции.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и две точки $A(x_0; f(x_0))$ и $B((x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$, принадлежащие графику. Проведем через эти точки секущую l. В прямоугольном ΔABC катеты $AC = \Delta x$ и $BC = \Delta f$.

Угловой коэффициент k секущей l равен $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. (Напомним, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла α, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс).

Разумеется, введенные понятия используются в физике и технике. Запишем, например, **среднюю скорость** движения тела за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$. При движении тела по прямой средняя скорость $V_{cp}(\Delta t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$, где $x(t)$ – координата тела.

По аналогии со средней скоростью движения тела выражение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ называют **средней скоростью изменения функции** $f(x)$ на промежутке $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

III. Задание на уроке

№ 177(а); 178 (б); 179 (а, г); 180 (б, г); 182; 183 (а); 184 (б); 186 (а, г); 187 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение приращения аргумента и приращения функции.
2. Чему равен угловой коэффициент секущей к графику функции?
3. Запишите определение средней скорости движения тела.
4. Что называют средней скоростью изменения функции?

V. Задание на дом

№ 177(б); 178 (г); 179 (б, в); 180 (а, в); 181; 183 (в); 184 (в); 185; 186 (б, в); 187 (в).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 56–57. Понятие о производной

Цель: рассмотреть понятия производной и мгновенной скорости движения тела.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение средней скорости движения тела.

2. Выразите приращение функции $f(x)$ в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x$; б) $f(x) = 3\cos 2x$.

3. Найдите среднюю скорость точки, движущейся по прямой, за промежуток времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, если ее координата $x(t) = -3t^2 + \dfrac{2}{t+1}$.

Вариант 2

1. Дайте определение средней скорости изменения функции.

2. Выразите приращение функции $f(x)$ в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

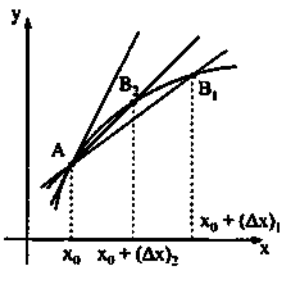
а) $f(x) = 3x^2 + 2x$; б) $f(x) = 2\sin 3x$.

3. Найдите среднюю скорость точки, движущейся по прямой, за промежуток времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, если ее координата $x(t) = -2t^2 + \dfrac{3}{t+4}$.

III. Изучение нового материала

1. Понятие о касательной к графику функции

Практически все рассматриваемые в школе функции имеют графики, представляющие собой **гладкие кривые**. Рассмотрим поведение таких кривых. Для этого еще раз вернемся к рисунку предыдущего урока.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и точки $A(x_0; f(x_0))$, $B_1(x_0 + (\Delta x)_1;\ f(x_0 + (\Delta x)_1))$ и $B_2(x_0 + (\Delta x)_2;\ f(x_0 + (\Delta x)_2))$, принадлежащие графику. Через точки A и B_1, A и B_2 проведем секущие AB_1 и AB_2.

При небольших значениях Δx секущие AB_1 и AB_2 мало отличаются от соответствующих дуг. Видно, что с уменьшением Δx различие между секущей и дугой уменьшается. Очевидно, что при стремлении положения точек B_1 и B_2 к положению точки A секущие AB_1 и AB_2 становятся **касательными**. Таким образом, при x близких к x_0 график функции $f(x)$ **практически совпадает** с графиком касательной, проведенной в точке x_0. Поэтому необходимо знать **поведение** такой **касательной**, то есть **уравнение касательной**. Координаты одной точки касательной известны – это точка $(x_0; f(x_0))$. Остается определить угловой коэффициент k касательной.

Пример 1

Получим уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0 = 1$.

Угловой коэффициент $k(\Delta x)$ секущей, проходящей через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ равен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, где Δf – приращение функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента. Для функции $f(x)=x^3$ получаем $k(\Delta x)=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=$ $=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0(\Delta x)+(\Delta x)^2$. Теперь найдем угловой коэффициент k касательной. Коэффициент $k(\Delta x)$ будет стремиться к величине k, если Δx приближается к нулю. Очевидно, что при малых Δx коэффициент $k(\Delta x)\approx k\approx 3x_0^2$. При $x_0 = 1$ находим $k=3$ и $f(x_0)=1^3=1$.

Уравнение касательной имеет вид $y=kx+b$, или $y=3x+b$. Так как эта касательная проходит через точку (1; 1), то получаем условие $1 = 3 \cdot 1 + b$, откуда $b = -2$. Итак, уравнение касательной имеет вид $y=3x-2$. Следовательно, при x близких к $x_0 = 1$ функция $f(x)=x_0^3$ ведет себя примерно как касательная $y=3x-2$.

2. Мгновенная скорость движения

Рассмотрим физическую задачу определения **мгновенной** скорости движения. Пусть точка движется по прямой и ее координата x в момент времени t равна $x(t)$. Предполагаем, что движение происходит непрерывно и плавно (как в реальной жизни). Возникает задача: по известной зависимости $x(t)$ определить скорость $V(t)$, с которой движется точка в момент времени t (такая скорость называется **мгновенной**).

Если зависимость $x(t)$ **линейная**, то задача имеет простое решение: в любой момент времени скорость есть отношение пройденного пути ко времени. Если движение **не равномерно**, то **решение** задачи **усложняется**. Сначала найдем среднюю скорость за промежуток времени Δt от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Эта скорость равна $V_{ср}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Очевидно, если

Δt очень мало, то за такой промежуток времени скорость практически не меняется. Поэтому средняя скорость $V_{ср}(\Delta t)$ почти не отличается от мгновенной скорости $V_{мгн}(t_0)$. Тогда возникает следующий способ вычисления мгновенной скорости: надо найти $V_{ср}(\Delta t)$ и определить, к какому значению оно стремится, если Δt практически равно нулю.

Пример 2

Найдем мгновенную скорость тела при равноускоренном (равнозамедленном) движении.

При таком движении координата тела меняется по закону $x(t) = x_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где x_0 и V_0 – начальные координата и скорость, a – ускорение тела.

1) Найдем приращение координаты $\Delta x(\Delta t) = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) =$

$$= \left(x_0 + V_0(t_0 + \Delta t) + \frac{a(t_0 + \Delta t)^2}{2}\right) - \left(x_0 + V_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2}\right) = V_0\Delta t + at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

2) Определим среднюю скорость $V_{ср}(\Delta t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = V_0 + at_0 + \dfrac{a\Delta t}{2}$.

3) Вычислим мгновенную скорость. Для этого будем уменьшать Δt, приближая эту величину к нулю (для краткости говорят, что Δt стремится к нулю, и записывают $\Delta t \to 0$). Тогда выражение $\dfrac{a\Delta t}{2} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, величины V_0 и at_0 постоянны. Получаем, что при $\Delta t \to 0$ величина $V_{ср}(\Delta t) = V_{мгн}(t_0) = V_0 + at_0$. Итак, мгновенная скорость $V_{мгн}(t_0) = V_0 + at_0$.

3. Производная

Два рассмотренных примера о нахождении уравнения касательной к данной кривой и вычислении мгновенной скорости тела имели **различные формулировки**, но решались, фактически, с использованием **одинакового алгоритма**. Применительно к произвольной функции $f(x)$ и любой точке x_0 ее области определения такой алгоритм (схема) имеет вид.

1) С помощью формулы, задающей функцию $f(x)$, найдем ее **приращение** в точке x_0 и получаем $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2) Определяем **выражение для разностного отношения** $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, которое затем преобразуем (упрощаем, сокращаем на Δx и т. д.).

3) Вычисляем, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю.

Найденное подобным образом число называют **производной функции $f(x)$ в точке x_0**. По аналогии с физикой производная функции $f(x)$ в точке x_0 характеризует **скорость изменения данной функции в точке x_0**.

Итак, **производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.** Производную функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от x_0»).

Пример 3

Найдем производную функции $f(x)=3x^2+2x$ в точке x_0.

В соответствии с описанной схемой вычислим производную.

1) Найдем приращение функции $\Delta f=3(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)-$ $-(3x_0^2+2x_0)=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2+2\Delta x$.

2) Определяем разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=6x_0+3\Delta x+2$.

3) При $\Delta x\to 0$ величина $3\Delta x\to 0$, слагаемые $6x_0$ и 2 постоянны (не зависят от Δx). Тогда отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to 6x_0+2$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому $f'(x)=6x_0+2$ − производная функции $f(x)=3x^2+2x$ в точке x_0.

Пример 4

Найдем производную линейной функции $f(x)=ax+b$ в точке x_0 (где a и b постоянны).

Используя описанный алгоритм, вычислим производную.

1) Найдем приращение функции $\Delta f=(a(x_0+\Delta x)+b)-(ax_0+b)=a\Delta x$.

2) Определяем разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=a$.

3) Так как a постоянная величина, то $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ − постоянное число при любом значении Δx. Поэтому $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to a$ при $\Delta x\to 0$.

Итак, $f'(x_0)=a$ − производная функции $f(x)=ax+b$ в любой точке x_0.

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют **дифференцируемой** в этой точке. Пусть D – множество точек, в которых

$f(x)$ дифференцируема. Сопоставляя каждому $x \in D$ число $f'(x)$, получают новую функцию $f'(x)$ с областью определения D. Эту функцию называют **производной** функции $y = f(x)$ и обозначают $f'(x)$ или $y'(x)$. Нахождение производной данной функции $f(x)$ называют **дифференцированием** функции $f(x)$.

IV. Задание на уроке

№ 188 (а); 189 (а, б); 190; 191 (б); 192 (а); 193 (а, в); 194 (а, в); 195 (б); 196 (б).

V. Контрольные вопросы

1. Понятие о касательной к графику функции.
2. Как найти угловой коэффициент касательной?
3. Вычисление мгновенной скорости движения.
4. Дайте определение производной функции.
5. Какая функция называется дифференцируемой?
6. Что называется дифференцированием функции?

VI. Задание на дом

№ 188 (б); 189 (в, г); 191 (а); 192 (б); 193 (б, г); 194 (б, г); 195 (г); 196 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 58–59. Понятие о непрерывности функции и предельном переходе

Цель: обсудить непрерывность и предел функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = 4x^2 - 5x$ в точке $x_0 = 3$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \dfrac{3}{x}$ в точке $x_0 = -1$.

3. Определите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + 5$ в момент $t_0 = 4$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x) = 3x^2 + 4x$ в точке $x_0 = 2$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = -\frac{2}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

3. Определите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = -4t^3 + 3$ в момент $t_0 = 3$.

III. Изучение нового материала

Еще раз вернемся к определению мгновенной скорости равноускоренного движения. Функция $V_{ср}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = V_0 + at_0 + \frac{a\Delta t}{2}$ не определена при $\Delta t = 0$. Но для числа $L = V_0 + at_0$ при уменьшении $|\Delta t|$ разность $V_{ср}(\Delta t) - L$ приближается к нулю. Поэтому писали $V_{ср}(\Delta t) - L \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Такой факт можно сформулировать и по другому: **предел функции** $V_{ср}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ равен числу L и записать в виде $\lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{ср}(\Delta t) = L$. При этом возникает важнейшее в высшей математике **понятие предела функции.**

Функция $f(x)$ имеет **предел** L (или **стремится к** числу L) **при** x, **стремящемся к** x_0, **если разность** $f(x) - L$ **сколь угодно мала** (то есть **разность** $|f(x) - L| < h$, где h – **любое фиксированное положительное число**). При этом **в точке** x_0 **функция** $f(x)$ может быть и **не определена**. Вместо $x \to x_0$ можно также писать $\Delta x \to 0$. Нахождение числа L для функции $f(x)$ и точки x_0 называют **предельным переходом**, то есть $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Слово «предел» означает «граница».

Пример 1

Найдем $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, где функция $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

Учитывая, что $\Delta x \to 0$, будем считать $x = 1 + \Delta x$, где $\Delta x \to 0$. Тогда в окрестности точки $x_0 = 1$ функция имеет вид $f(x) = \frac{(1+\Delta x) - 2}{(1+\Delta x)+1} = \frac{\Delta x - 1}{\Delta x + 2} = f(\Delta x)$, так как в такой окрестности фактически функция зависит только от Δx. Найдем $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 1}{\Delta x + 2}$.

Очевидно, что при $\Delta x \to 0$ числитель такой дроби $(\Delta x - 1) \to -1$, а знаменатель $(\Delta x+2)\to 2$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x) = -\frac{1}{2} = L$. Покажем, что это действительно так, используя определение предела.

Найдем разность $\left|f(x)-L\right| = \left|\frac{\Delta x-1}{\Delta x+2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3\Delta x}{2(\Delta x+2)}\right| \approx \frac{3\left|\Delta x\right|}{4}$.

Так как нас интересует поведение функции непосредственно вблизи точки $x_0 = 1$, то считаем, что $\Delta x \ll 1$ и $\Delta x + 2 \approx 2$. Такая разность должна быть меньше любого наперед заданного положительного числа h. Поэтому надо решить неравенство $\frac{3\left|\Delta x\right|}{4} < h$, откуда $\left|\Delta x\right| < \frac{4h}{3}$.

Выполним некоторые оценки.

а) Если $h = 0,1$ (то есть значения функции находятся в промежутке $L-h < f(x) < L+h$ или $-0,6 < f(x) < -0,4$), то $\left|\Delta x\right| < \frac{4h}{3} = 0,13$ (то есть значения аргумента должны находиться в диапазоне $x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$ или $0,87 < x < 1,13$).

б) Если $h = 0,01$ (то есть значения функции лежат в промежутке $-0,51 < f(x) < -0,49$), то $|\Delta x| < 0,013$ (то есть значения аргумента должны находиться в диапазоне $0,987 < x < 1,013$).

в) Если $h = 0,001$ (то есть значения функции лежат в промежутке $-0,501 < f(x) < -0,499$), то $|\Delta x| < 0,0013$ (то есть значения аргумента должны находиться в интервале $0,9987 < x < 1,0013$).

Таким образом, чем меньше значения функции $f(x)$ будут отличаться от значения ее предела L в точке x_0, тем ближе значения аргумента x должны располагаться к точке x_0.

Заметим, что в этом примере функция $f(x)$ была определена в точке x_0 и значения функции и ее предела в такой точке совпадали, то есть $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Подобные функции называются **непрерывными в точке x_0**. Предел функции может быть **найден**, если даже сама **функция не определена в точке x_0.**

Пример 2

Найдем $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, где функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Очевидно, что такая функция не определена в точке $x_0 = 1$. Как и в предыдущем примере, будем считать, что $x = 1 + \Delta x$, где $\Delta x \to 0$. То-

гда в окрестности точки $x_0 = 1$ функция имеет вид $f(x)=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{(1+\Delta x)-1}=$
$=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x=f(\Delta x)$, так как в такой окрестности функция зависит только от Δx. Найдем $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(2+\Delta x)=2$. По аналогии с предыдущим примером легко доказать, что действительно $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Также, используя определение, можно доказать, что функция **не имеет предела** в данной точке.

Пример 3

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не существует, где $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

Так как поведение функции исследуется в окрестности точки $x_0 = 1$, то будем считать, что $x = 1 + \Delta x$, где $\Delta x\to 0$. Запишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{(1+\Delta x)-1}=\dfrac{1}{\Delta x}=f(\Delta x)$, так как функция зависит только от Δx. Очевидно, что при $\Delta x\to 0$ знаменатель дроби мало отличается от 0. При этом сама дробь становится или очень большой, или очень малой (в зависимости от знака Δx), то есть $f(x) = f(\Delta x) \to \pm\infty$ (символом ∞ обозначены бесконечно большие величины).

Докажем, что данная функция не имеет предела, методом от противного. Предположим, что такой предел существует и равен L. Найдем разность $|f(x)-L|=\left|\dfrac{1}{\Delta x}-L\right|$. Рассмотрим неравенство $\left|\dfrac{1}{\Delta x}-L\right|<h$ или $-h<\dfrac{1}{\Delta x}-L<h$ или $L-h<\dfrac{1}{\Delta x}<L+h$. Будем считать, что $h \neq L$. Решая двойное линейное неравенство, получим $\dfrac{1}{L-h}>\Delta x>\dfrac{1}{L+h}$. Но этот результат противоречит условию $\Delta x\to 0$.

Еще раз вернемся к понятию **непрерывности** функции. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной в точке x_0**, если $f(x)\to f(x_0)$ при $x\to x_0$, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. При этом $f(x)-L=f(x)-f(x_0)=\Delta f$. Поэтому можно дать и другое определение непрерывной функции. Функция $f(x)$ **непрерывна в точке x_0**, если $|\Delta f|$ мало при малых значениях $|\Delta x|$, то есть если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f=0$. Таким образом, для непрерывной в точке x_0 функции **малым изменениям аргумента** в точке x_0 соответствуют **малые изменения значений функции**.

Все известные **элементарные функции непрерывны** в каждой точке своей области определения. **Графики** таких функций изображаются **непрерывными кривыми**. На свойстве непрерывности функции основан способ построения графика функции «по точкам». Однако необходимо убедиться, что данная функция действительно является непрерывной. В простейших случаях такое исследование проводится на основании **определения**.

Пример 4

Докажем, что квадратичная функция $f(x)=ax^2+bx+c$ непрерывна в каждой точке.

$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a(x_0+\Delta x)^2+b(x_0+\Delta x)+c-(ax_0^2+bx_0+c)=$ $=2ax_0\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x$. Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2ax_0\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x)=0$. Тогда по определению данная функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке.

Пример 5

Докажем, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в каждой точке.

Найдем приращение функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$ $=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$. Вычислим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right)=-2\cdot 0\cdot\sin x_0=0$. Поэтому по определению данная функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке.

Предельный переход дает **новое средство** исследования функции. Такой переход широко используется в математическом анализе. Отметим **правила предельного перехода**, которые доказывают в курсе математического анализа.

Правило 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$.

Правило 2. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)$.

Эти правила следуют из определений непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 и производной функции в точке x_0.

Правило 3. Пусть $f(x)\to A$, $g(x)\to B$ при $x\to x_0$ (то есть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$). Тогда при $x\to x_0$ (то есть при $\Delta x\to 0$):

а) $f(x)+g(x)\to A+B$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$;

б) $f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$;

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ (при $B \neq 0$).

Для непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, очевидно, $A = f(x_0)$ и $B = g(x_0)$. Поэтому приведенные правила означают, что **сумма, произведение и частное непрерывных в точке x_0 функций также непрерывны** в точке x_0 (частное в случае, когда $g(x_0) \neq 0$).

Правила предельного перехода широко используются при доказательстве **непрерывности** функций и **вычислении производных.**

Пример 6

Докажем, что функция $f(x) = 10x^3 + 2\sqrt{x} + 3\sin 2x$ непрерывна в любой точке x_0 промежутка $(0; \infty)$.

Функция $f(x)$ представляет собой сумму функций $y_1 = 10x^3$ и $y_2 = 3\sin 2x$, непрерывных в любой точке, и функции $y_3 = 2\sqrt{x}$, непрерывной в любой точке x_0 промежутка $(0; \infty)$. Поэтому по свойству 3а) функция $f(x)$ непрерывна в любой точке промежутка $(0; \infty)$.

Пример 7

Докажем, что $f'(x) = -6x + 2$, если $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Для произвольной точки x_0 найдем приращение функции $f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -3(x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x) - (-3x_0^2 + 2x_0) =$
$= -6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x$.

2) Определим разностное отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -6x_0 - 3\Delta x + 2$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(-6x_0 - 3\Delta x + 2) = -6x_0 + 2 = f'(x_0)$, так как по свойствам 3а, б) функция $-6x_0 - 3\Delta x + 2 \to -6x_0 + 2$. Поэтому $f'(x) = -6x + 2$.

IV. Задание на уроке

№ 197 (а, в); 198 (в); 199 (а, г); 200 (а, в); 201 (б, в); 202 (а, б); 203 (а, г); 204, 207 (а, в).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение предела функции при $x \to x_0$.
2. Какая функция называется непрерывной в точке x_0?
3. Перечислите правила предельного перехода.

VI. Задание на дом

№ 197 (б, г); 198 (а); 199 (б, в); 200 (б, г); 201 (а, г); 202 (в, г); 203 (б, в); 206, 207 (б, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 60–61. Правила вычисления производных

Цель: вывести правила дифференцирования и использовать их для вычисления производных.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (письменный опрос)

Вариант 1

1. Дайте определение предела функции при $x \to x_0$.

2. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x \text{ при } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Укажите точку разрыва функции.

3. Найдите предел функции:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

Вариант 2

1. Перечислите правила предельного перехода.

2. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } x \leq \pi \\ \sin 2x \text{ при } x > \pi \end{cases}$. Укажите точку разрыва функции.

3. Найдите предел функции:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$.

III. Изучение нового материала

При вычислении производных необходимо знать **правила дифференцирования**. Для удобства будем обозначать значения функций $U(x)$ и $V(x)$ в точке x_0 следующим образом: $U(x_0) = U$, $V(x_0) = V$, $U'(x_0) = U'$, $V'(x_0) = V'$.

Правило 1. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и $(U + V)' = U' + V'$, то есть **производная суммы** функций **равна сумме производных** этих функций.

Докажем это правило, используя **определение производной**.

1) Вычислим приращение суммы функций в рассматриваемой точке x_0: $\Delta(U + V) = U(x_0 + \Delta x) + V(x_0 + \Delta x) - U(x_0) - V(x_0) =$
$= (U(x_0 + \Delta x) - U(x_0)) + (V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)) = \Delta U + \Delta V$.

2) Найдем разностное отношение $\frac{\Delta(U+V)}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta V}{\Delta x}$.

3) Так как функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то найдем $(U+V)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}+\frac{\Delta V}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=U'+V'$.

Для дальнейшего изложения материала нам понадобится лемма.

Лемма. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$. Так как $\Delta f=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Правило 2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и $(UV)'=U'V+UV'$.

Докажем это утверждение.

1) Найдем приращение произведения функций: $\Delta(UV)=$
$=U(x_0+\Delta x)V(x_0+\Delta x)-U(x_0)V(x_0)=(U(x_0)+\Delta U)(V(x_0)+\Delta V)-$
$-U(x_0)V(x_0)=U(x_0)V(x_0)+U(x_0)\Delta V+V(x_0)\Delta U+\Delta U\cdot\Delta V-U(x_0)V(x_0)=$
$=U(x_0)\Delta V+V(x_0)\Delta U+\Delta U\cdot\Delta V.$

2) Вычислим разностное отношение $\frac{\Delta(UV)}{\Delta x}=$

$$=U(x_0)\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}+V(x_0)\frac{\Delta U}{\Delta x}+\Delta U\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

3) Найдем производную $(UV)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(UV)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(U(x_0)\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}+V(x_0)\frac{\Delta U}{\Delta x}+\Delta U\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}\right)=U(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}+$$

$$+V(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta U\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=U\cdot V'+V\cdot U'+0\cdot V'=U'V+UV'.$$

Таким образом, действительно $(UV)'=U'V+UV'$.

Следствие. Если функция $U(x)$ дифференцируема в точке x_0, C – постоянная величина, то функция CU дифференцируема в этой точке и $(CU)'=CU'$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Для доказательства используем правило 2 и получим $(CU)'=C'\cdot U+C\cdot U'=0\cdot U+CU'=CU'$.

Правило 3. Если функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и функция $V(x)$ не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{U}{V}$ также дифференцируемо в точке x_0 и $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - UV'}{V^2}$. Сначала выведем формулу $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$.

1) Найдем приращение функции $\frac{1}{V}$ и получим $\Delta\left(\frac{1}{V}\right) =$
$$= \frac{1}{V(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{V(x_0)} = \frac{V(x_0) - V(x_0+\Delta x)}{V(x_0+\Delta x)V(x_0)} = -\frac{\Delta V}{V(x_0)V(x_0+\Delta x)}.$$

2) Определим разностное отношение $\dfrac{\Delta\left(\frac{1}{V}\right)}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x_0)V(x_0+\Delta x)}$.

3) Найдем производную функции $\left(\frac{1}{V}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x_0)V(x_0+\Delta x)} =$
$$= \frac{-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(V(x_0)V(x_0+\Delta x))} = -\frac{V'}{V\cdot V} = -\frac{V'}{V^2}.$$

Теперь найдем производную частного, используя правило нахождения производной произведения функций. Получаем:
$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \left(U\cdot\frac{1}{V}\right)' = U'\cdot\frac{1}{V} + U\left(\frac{1}{V}\right)' = \frac{U'}{V} + U\cdot\frac{-V'}{V^2} = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

В математике очень часто используется **степенная функция** $y(x) = x^n$ (где n – произвольное натуральное число, $n > 1$). Докажем, что производная степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Известно, что $x' = 1$. Используя правило 2, найдем производные функций:

$(x^2)' = (x\cdot x)' = x'\cdot x + x\cdot x' = x + x = 2x;$

$(x^3)' = (x^2\cdot x)' = (x^2)'\cdot x + x^2\cdot x' = 2x\cdot x + x^2\cdot 1 = 3x^2;$

$(x^4)' = (x^3\cdot x)' = (x^3)'\cdot x + x^3\cdot x' = 3x^2\cdot x + x^3\cdot 1 = 4x^3.$

Аналогично докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n. Для этого используем метод матема-

тической индукции. Предположим, что приведенная формула справедлива при $n = k - 1$, то есть $(x^{k-1})' = (k-1)x^{k-2}$. Покажем, что формула верна и при $n = k$. Получаем $(x^k)' = (x^{k-1} \cdot x)' = (x^{k-1})' \cdot x + x^{k-1} \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x + x^{k-1} \cdot 1 = k \cdot x^{k-1}$. Было доказано, что если формула верна при $n = k - 1$, то она справедлива и при $n = 3$. Но если она верна при $n = 3$, то будет справедлива и при $n = 4$ и т. д.

Вообще говоря, **для любого значения n и $x > 0$** производная $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Из дифференцируемости степенной функции и основных правил дифференцирования следует **утверждение**: целые **рациональные функции** (многочлены) и **дробно-рациональные функции дифференцируемы** в каждой точке своей области определения.

Теперь рассмотрим применение правил дифференцирования и производной степенной функции для решения задач.

Пример 1

Найдем производную функции:

а) $(3x^7 + 2x^3 - 6x^2)' = (3x^7)' + (2x^3)' - (6x^2)' = 3(x^7)' + 2(x^3) - 6(x^2)' = 3 \cdot 7x^6 + 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x = 21x^6 + 6x^2 - 12x$. Было использовано правило 1 и следствие из правила 2.

б) $((2x^5 + 3x) \cdot (4x^3 + x^2))' = (2x^5 + 3x)'(4x^3 + x^2) + (2x^5 + 3x)(4x^3 + x^2)' = (10x^4 + 3)(4x^3 + x^2) + (2x^5 + 3x)(12x^2 + 2x) = 40x^7 + 12x^3 + 10x^6 + 3x^2 + 24x^7 + 36x^3 + 4x^6 + 6x^2 = 64x^7 + 14x^6 + 48x^3 + 9x^2$.

Были использованы правила 1, 2 и следствие из правила 2.

Заметим, что производную можно найти и другим способом, сначала упростив саму функцию. Получаем $((2x^5 + 3x) \cdot (4x^3 + x^2))' = (8x^8 + 2x^7 + 12x^4 + 3x^3)' = 8 \cdot 8x^7 + 2 \cdot 7x^6 + 12 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 = 64x^7 + 14x^6 + 48x^3 + 9x^2$. Здесь использовались правило 1 и следствие из правила 2.

в) $$\left(\frac{4x^3 + 2x}{3x^2 + 1}\right)' = \frac{(4x^3 + 2x)'(3x^2 + 1) - (4x^3 + 2x)(3x^2 + 1)'}{(3x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{(12x^2 + 2)(3x^2 + 1) - (4x^3 + 2x)6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{36x^4 + 12x^2 + 6x^2 + 2 - 24x^4 - 12x^2}{(3x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{12x^4 + 6x^2 + 2}{(3x^2 + 1)^2}.$$ Использованы правила 1, 3 и следствие из правила 2.

Пример 2

Найдем производную функции:

а) $\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{x^7}+4x^3\right)'=\left(2x^{\frac{1}{3}}-3x^{-7}+4x^3\right)'=2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3\cdot(-7)x^{-8}+$

$+4\cdot3x^2=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}+21x^{-8}+12x^2=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21}{x^8}+12x^2$. Были использованы правило 1 и следствие из правила 2.

б) $\left(\left(3x^4+2\sqrt[5]{x}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right)'=\left(\left(3x^4+2x^{\frac{1}{5}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}\right)\right)'=$

$=\left(3x^4+2x^{\frac{1}{5}}\right)'\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}\right)+\left(3x^4+2x^{\frac{1}{5}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}\right)'=$

$=\left(12x^3+\frac{2}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-3}\right)+\left(3x^4+2x^{\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-4}\right)=$

$=12x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{10}}+12+\frac{2}{5}x^{-\frac{19}{5}}+\frac{3}{2}x^{\frac{7}{2}}+x^{-\frac{3}{10}}-9-6x^{-\frac{19}{5}}=$

$=\frac{27}{2}x^{\frac{7}{2}}-\frac{7}{5}x^{-\frac{3}{10}}-\frac{28}{5}x^{-\frac{19}{5}}+3$. Были использованы правила 1, 2 и следствие из правила 2.

IV. Задание на уроке

№ 208 (б); 209 (г); 210 (а, б); 212 (в, г); 213 (б); 214 (а); 215 (в, г); 216 (а); 217 (г); 218 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Чему равна производная суммы функций? Докажите.
2. Выведите формулу $(UV)'=U'V+UV'$.
3. Получите формулу для частного функций.
4. Приведите формулу для производной степенной функции.

VI. Задание на дом

№ 208 (г); 209 (а); 210 (в, г); 212 (а, б); 213 (в); 214 (б); 215 (а, б); 216 (б); 217 (б); 218 (в, г); 219.

VII. Творческие задания

Найдите производную функции:

1) $f(x)=7x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{4}{5}}+3x^2$; 2) $f(x)=9x^{\frac{1}{7}}-3x^{-\frac{3}{4}}+2x^3$;

3) $f(x)=6\sqrt[4]{x}+\frac{3}{\sqrt[7]{x^2}}-2x^{\frac{3}{2}}$; 4) $f(x)=7\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+3x^{\frac{5}{2}}$;

5) $f(x)=\left(6\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$; 6) $f(x)=\left(7\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)\left(8\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$;

7) $f(x)=\dfrac{7\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 8) $f(x)=\dfrac{8\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}{3\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}}$.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 62. Производная сложной функции

Цели: рассмотреть понятие сложной функции и правило нахождения ее производной.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Выведите формулу для производной суммы функций.
2. Найдите производную функции:

а) $f(x)=(3x^7+6x^{-1})(2x^{-3}+5x^2)$; б) $f(x)=\dfrac{2x^6-x^{-2}}{x^3+2x}$.

Вариант 2

1. Выведите формулу для производной произведения функций.
2. Найдите производную функции:

а) $f(x)=(2x^4-3x^{-2})(5x^7-2x^{-4})$; б) $f(x)=\dfrac{3x^8-2x^{-3}}{x^4+3x^2}$.

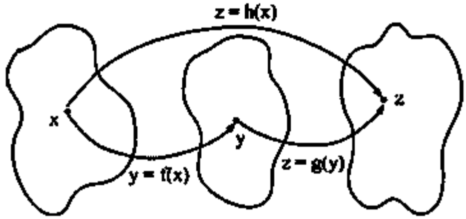
III. Изучение нового материала

Подавляющее большинство изучаемых функций являются сложными. Например, функции $\sqrt{x^3+2x}$, $(x^2+x)^3$, $\sin 3x$, $\operatorname{tg} x^2$, $\cos^5 x$, $\arcsin(x^2+1)$, $\operatorname{arctg}(3x+1)$ являются сложными. Разберемся с понятием сложной функции. Начнем с примера.

Пример 1

Вычислим по заданному значению x соответствующее значение z функции h, заданной формулой $z=h(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$. Для этого сначала вычислим по заданному значению x значение $y = f(x) = 1 + x^2$. Потом по этому значению y найдем $z = g(y) = \sqrt[3]{y}$.

Таким образом, функция $f(x)$ ставит в соответствие числу x число y, а функция $g(y)$ – числу y число z. Совокупность этих операций называют **сложной функцией** $h(x)$, составленной из функций $g(y)$ и $f(x)$, и записывают $h(x) = g(f(x))$.



Чтобы вычислить значение сложной функции $h(x) = g(f(x))$ в произвольной точке x, сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а затем значение z функции g.

Теперь остановимся на **производной сложной функции**. Для ее вычисления существует **правило**. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также **имеет производную** в точке x_0 и она **равна** $h'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Докажем эту формулу. Найдем $h'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Предполагалось, что $\Delta f \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0.

Пример 2

Найдем производную функции $h(x) = (3x^2 + 4x)^{83}$.

Функция $h(y)$ является сложной $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = y^{83}$ и $y = f(x) = 3x^2 + 4x$. Тогда $f'(x) = (3x^2 + 4x)' = 6x + 4$ и $g'(y) = (y^{83})' = 83y^{82}$. Поэтому получаем: $h'(x) = 83y^{82} \cdot (6x + 4) = 83(3x^2 + 4x)^{82} \cdot (6x + 4)$.

Пример 3

Найдем производную функции $h(x) = 2\sqrt[5]{4x^7 + 3x^2} = 2(4x^7 + 3x^2)^{\frac{1}{5}}$.

Данная функция является сложной $h(x) = g(f(x))$, где $y = f(x) =$ $= 4x^7 + 3x^2$ и $h = g(y) = 2y^{\frac{1}{5}}$. Тогда $f'(x) = (4x^7 + 3x^2)' = 28x^6 + 6x$ и

$g'(y)=\left(2y^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{2}{5}y^{-\frac{4}{5}}$. Поэтому получаем: $h'(x)=\frac{2}{5}y^{-\frac{4}{5}}\cdot(28x^6+6x)=$

$=\frac{2}{5}(4x^7+3x^2)^{-\frac{4}{5}}\cdot(28x^6+6x)$.

IV. Задание на уроке

№ 220 (г); 221 (а); 222 (б); 223 (а, б); 224 (а); 225 (б); 226 (а, б); 227 (б, в); 229 (а, г); 230 (б, в).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте понятие сложной функции.
2. Напишите формулу производной сложной функции.

VI. Задание на дом

№ 220 (в); 221 (в); 222 (г); 223 (в, г); 224 (г); 225 (г); 226 (в, г); 227 (а, г); 229 (б, в); 230 (а, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 63–64. Производные тригонометрических функций

Цели: вывести формулы для производных тригонометрических функций и рассмотреть формулы для производных обратных тригонометрических функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Найдите производную функции:

1) $h(x)=2(3x^4-2x^3+5x^{-2})^{18}$;

2) $h(x)=3\sqrt[5]{(2x^3+\sqrt{x})^2}$.

Вариант 2

Найдите производную функции:

1) $h(x)=3(5x^7+3x^4+6x^{-3})^{19}$;

2) $h(x)=2\sqrt[4]{(5x^6+\sqrt[3]{x^2})^3}$.

III. Изучение нового материала

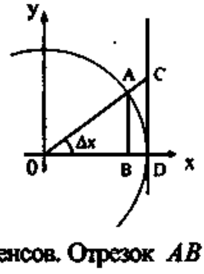
Получим формулы **производных** основных **тригонометрических функций**. Сначала рассмотрим функцию **синус**. Функция синус имеет производную в любой точке и $(\sin x)' = \cos x$. Докажем это.

Найдем приращение функции $\Delta \sin x = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Была использована формула разности синусов. Составим разностное отношение $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Найдем производную $(\sin x_0)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$. Таким образом, было показано, что $(\sin x)' = \cos x$.

При выводе был использован предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ (первый замечательный предел, изучаемый в математическом анализе). Докажем такое утверждение, используя геометрические соображения. Рассмотрим фрагмент единичной окружности и построим угол Δx.



Построим также ось тангенсов. Отрезок $AB = \sin \Delta x$, дуга $AD = \Delta x$, отрезок $CD = \operatorname{tg}\Delta x$. Очевидно, что справедливо неравенство $AB \le AD \le CD$ или $\sin\Delta x \le \Delta x \le \operatorname{tg}\Delta x$. Будем считать, что $\sin\Delta x > 0$, и разделим все части неравенства на $\sin\Delta x$. Тогда получаем $1 \le \frac{\Delta x}{\sin \Delta x} \le \frac{1}{\cos \Delta x}$. В неравенстве перейдем к обратным величинам и получим

$1 \geq \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \geq \cos \Delta x$. При $\Delta x \to 1$ функция $\cos\Delta x \to 1$, тогда в силу полученного неравенства $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$.

Функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ имеют производные в каждой точке своей области определения и **справедливы формулы**: $(\cos x)' = -\sin x$; $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Докажем эти формулы.

Используем формулу приведения и правило дифференцирования сложной функции и получим $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right)' = -\sin x.$$

Для доказательства двух последних формул используем правило дифференцирования частного функций и формулы производных синуса и косинуса. Получаем: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Рассмотрим применения полученных формул.

Пример 1

а) $(3x^4 + 5\sin x - 2\operatorname{ctg} x)' = 12x^3 + 5\cos x + \frac{2}{\sin^2 x}$;

б) $((2\operatorname{tg} x + x^3)(4x^5 - \cos x))' = (2\operatorname{tg} x + x^3)'(4x^5 - \cos x) +$

$+ (2\operatorname{tg} x + x^3)(4x^5 - \cos x)' = \left(\frac{2}{\cos^2 x} + 3x^2\right)(4x^5 - \cos x) +$

$+ (2\operatorname{tg} x + x^3)(20x^4 + \sin x)$;

в) $\left(\dfrac{3\cos x+5x^4}{2x^3-\sin x}\right)'=\dfrac{(3\cos x+5x^4)'(2x^3-\sin x)-(3\cos x+5x^4)(2x^3-\sin x)'}{\left(2x^3-\sin x\right)^2}=$

$=\dfrac{(-3\sin x+20x^3)(2x^3-\sin x)-(3\cos x+5x^4)(6x^2-\cos x)}{(2x^3-\sin x)^2}$;

г) $(2\operatorname{tg}^5 x)'=2\cdot 5\operatorname{tg}^4 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{10\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$;

д) $(3\cos^4(6x^3+2x))'=3\cdot 4\cos^3(6x^3+2x)\cdot(-\sin(6x^3+2x))\cdot(18x^2+2)=$

$=-12\cos^3(6x^3+2x)\sin(6x^3+2x)\cdot(18x^2+2)$.

Разумеется, такие формулы могут быть использованы и при решении более сложных задач.

Пример 2

Найдем производную функции:

а) $(\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x))'=(\sin(\cos^2 x))'\cos(\sin^2 x)+$

$+\sin(\cos^2 x)(\cos(\sin^2 x))'=\cos(\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x)\cos(\sin^2 x)+$

$+\sin(\cos^2 x)\cdot(-\sin(\sin^2 x))\cdot 2\sin x\cos x=-\sin 2x(\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)+$

$+\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x))=-\sin 2x\cdot\cos(\cos^2 x-\sin^2 x)=$

$=-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$;

б) $(\sin(\sin(\sin x)))'=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$;

в) $\left(\sqrt{\sin x\sqrt{\cos x\sqrt{\sin x\sqrt{\cos x\ldots}}}}\right)'=\left(\sin^{\frac12}x\cos^{\frac14}x\sin^{\frac18}x\cos^{\frac1{16}}x\ldots\right)'=$

$=\left(\sin^{\frac{1/2}{1-1/4}}x\cos^{\frac{1/4}{1-1/4}}x\right)'=\left(\sin^{\frac23}x\cos^{\frac13}x\right)'=\left(\sin^{\frac23}x\right)'\cos^{\frac13}x+\sin^{\frac23}x\left(\cos^{\frac13}x\right)'=$

$=\dfrac23\sin^{-\frac13}x\cos x\cos^{\frac13}x+\sin^{\frac23}x\cdot\dfrac13\cos^{-\frac23}x(-\sin x)=$

$=\dfrac23\sin^{-\frac13}x\cos^{\frac43}x-\dfrac13\sin^{\frac53}x\cos^{-\frac23}x=\dfrac13\sin^{-\frac13}x\cos^{-\frac23}x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$.

Была использована формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Без вывода приведем формулы производных обратных тригонометрических функций: $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Используем приведенные формулы для вычисления производных.

Пример 3

Найдем производную функции:

а) $(\arcsin(x^2-1))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \cdot (x^2-1)' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$;

б) $(\operatorname{arctg}^3\sqrt{x})' = 3\operatorname{arctg}^2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}^2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.

В заключение еще раз напомним правила дифференцирования и таблицу производных.

Правила дифференцирования

1) $(U+V)' = U'+V'$;   2) $(U \cdot V)' = U'V+UV'$;

3) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V-UV'}{V^2}$;   4) $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$(CU)' = CU'$.

Таблица производных

$f(x)$	C	x	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

IV. Задание на уроке

№ 231 (б); 232 (г); 233 (б); 234 (а, б); 235 (а, в); 236 (а, г); 237 (а); 238 (в, г); 239 (а, б); 240 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите и выведите формулы производных тригонометрических функций.

2. Приведите формулы производных обратных тригонометрических функций.

VI. Задание на дом

№ 231 (г); 232 (б); 233 (г); 234 (в); 235 (б, г); 236 (б, в); 237 (в); 238 (а, б); 239 (в, г); 240 (в, г).

VII. Творческие задания

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;   б) $f(x) = 3\operatorname{tg}^4\left(4x-\dfrac{\pi}{8}\right)$;

в) $f(x) = 3\sqrt[4]{x^2+x} + 4\cos^2\left(3x-\dfrac{\pi}{7}\right)$;   г) $f(x) = 2\sqrt[3]{4x^2+5x} - 3\operatorname{tg}^4\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\arcsin(x^3)$ б) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$;

в) $f(x)=\operatorname{arctg}^2 x$; г) $f(x)=\operatorname{arcctg}^{\frac{1}{5}} x$;

д) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x}$; е) $f(x)=\arccos\sqrt[3]{2x+1}$;

ж) $f(x)=\operatorname{arctg}^{\frac{1}{3}}(2x^4-3x)$; з) $f(x)=\operatorname{arcctg}^{\frac{1}{4}}(2x-x^2)$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 65–66. Контрольная работа по теме «Производная функции»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. По определению найдите производную функции $f(x)=3x^2$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{4x^2-1}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=2x^3+7x^2$, $x_0=2$;

б) $f(x)=3\sin x-\cos x+\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=2(3x-1)^{43}$, $x_0=0$.

4. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=2x^3+6x^2$.

Вариант 2

1. По определению найдите производную функции $f(x)=-4x^2$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{4x^2-1}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=5x^3-4x^2$, $x_0=2$;

б) $f(x)=2\sin x+\cos x-\operatorname{ctg}x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

в) $f(x)=3(2x-1)^{51}$, $x_0=2$.

4. Решите неравенство $f'(x)<0$, если $f(x)=4x^3-6x^2$.

Вариант 3

1. По определению найдите производную функции $f(x)=-2x^2+3x$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=3\sin^2 2x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

4. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=\sin x+\cos x$.

Вариант 4

1. По определению найдите производную функции $f(x)=3x^2-2x$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=4\cos^2 2x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

4. Решите неравенство $f'(x)<0$, если $f(x)=\sin x-\cos x$.

Вариант 5

1. По определению найдите производную функции $f(x)=2x^3+3x^2$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x^2-3}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=(3x^4+1)(2x^3-3)$;

б) $f(x)=3\,\mathrm{tg}^4(2x^2+1)$;

в) $f(x)=\frac{2\sin 3x-3\cos x}{\sin 2x}$.

4. Решите неравенство $f'(x)\ge g'(x)$, если $f(x)=3x^4-8x^3$ и $g(x)=30x^2-72x+13$.

Вариант 6

1. По определению найдите производную функции $f(x)=4x^3-6x^2$ и докажите, что функция непрерывна.

2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^3+4x-5}$.

3. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=(2x^3+1)(4x^4-2)$;

б) $f(x)=2\,\mathrm{ctg}^5(3x^2+2)$;

в) $f(x)=\dfrac{2\cos 3x-3\sin x}{\cos 2x}$.

4. Решите неравенство $f'(x)\le g'(x)$, если $f(x)=3x^4-72x+7$ и $g(x)=30x^2-8x^3$.

Урок 67. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ − число решивших задачу правильно или почти правильно;

± − число решивших задачу со значительными ошибками;

− − число не решивших задачу;

Ø − число не решавших задачу. Вариант 1, 2 − 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $f(x)=6x$.

2. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

3. *Ответ*: а) $f'(x) = 6x^2 + 14x$, $f'(2) = 52$;

б) $f'(x) = 3\cos x + \sin x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{11+\sqrt{3}}{2}$;

в) $f'(x) = 258(3x-1)^{42}$, $f'(1) = 129 \cdot 2^{43}$.

4. *Ответ*: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $f'(x) = -8x$.

2. *Ответ*: $-\dfrac{1}{2}$.

3. *Ответ*: а) $f'(x) = 15x^2 - 8x$, $f'(2) = 44$;

б) $f'(x) = 2\cos x - \sin x + \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7+2\sqrt{3}}{2}$;

в) $f'(x) = 306(2x-1)^{50}$, $f'(2) = 34 \cdot 3^{52}$.

4. *Ответ*: $x \in (0; 1)$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $f'(x) = -4x + 3$.

2. *Ответ*: 0.

3. *Ответ*: а) $f'(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$, $f'(1) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

б) $f'(x) = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;

в) $f'(x) = 6\sin 4x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

4. *Ответ*: $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $f'(x) = 6x - 2$.

2. *Ответ*: 0.

3. *Ответ*: а) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$, $f'(1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

б) $f'(x) = \dfrac{2}{(\cos x - \sin x)^2}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;

в) $f'(x) = -8\sin 4x$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3}$.

4. *Ответ*: $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Решения

Вариант 5

1. Найдем значения функции $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2$ и приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (6x^2 + 6x)\Delta x + (6x + 3)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$. Видно, что $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для любого x из области определения функции $(-\infty; \infty)$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна для любого x из области определения. Найдем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = (6x^2 + 6x) + (6x + 3)\Delta x + 2(\Delta x)^2$. Видно, что это отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 6x^2 + 6x$ при $\Delta x \to 0$. Тогда по определению $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

Ответ: $f'(x) = 6x^2 + 6x$.

2. Для вычисления предела функции разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x^2 + 3x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + 3x + 3} =$$

$$= \frac{(1-1)(1+2)}{1^2 + 3 \cdot 1 + 3} = 0.$$

Ответ: 0.

3а) Используем формулу для производной произведения функций и получим: $f'(x) = (x^4 + 1)'(2x^3 - 3) + (3x^4 + 1)(2x^3 - 3)' = 12x^3(2x^3 - 3) + (3x^4 + 1) \cdot 6x^2 = 42x^6 - 36x^3 + 6x^2$.

Ответ: $f'(x) = 42x^6 - 36x^3 + 6x^2$.

3б) Применим правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = 3 \cdot 4\,\mathrm{tg}^3(2x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(2x^2 + 1)}\right) \cdot 4x = \frac{48x\sin^3(2x^2 + 1)}{\cos^5(2x^2 + 1)}.$$

Ответ: $f'(x) = \frac{48x\sin^3(2x^2 + 1)}{\cos^5(2x^2 + 1)}$.

3в) Используем формулу для производной частного функций и производной сложной функции.

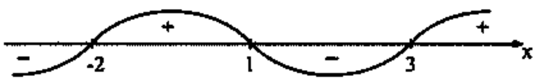
Имеем: $f'(x) = \frac{(2\sin 3x - 3\cos x)'\sin 2x - (2\sin 3x - 3\cos x)(\sin 2x)'}{\sin^2 2x} =$

$$= \frac{(6\cos 3x + 3\sin x)\sin 2x - (2\sin 3x - 3\cos x)\cdot 2\cos 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{6\sin 2x\cos 3x + 3\sin x\sin 2x - 4\sin 3x\cos 2x + 6\cos x\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Ответ: $f'(x) = \dfrac{6\sin 2x\cos 3x + 3\sin x\sin 2x - 4\sin 3x\cos 2x + 6\cos x\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

4. Сначала найдем производные данных функций $f'(x) = 12x^3 - 24x^2$ и $g'(x) = 60x - 72$. Получаем неравенство: $12x^3 - 24x^2 \geq 60x - 72$ или $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Найдем корни кубического многочлена $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; $x_3 = 3$ и разложим его на множители. Приходим к неравенству $(x-1)(x+2)(x-3) \geq 0$. Решим его методом интервалов и получим $x \in [-2; 1] \cup [3; \infty)$.



Ответ: $x \in [-2; 1] \cup [3; \infty)$.

Вариант 6

1. Найдем значения функции $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^3 - 6(x + \Delta x)^2$ и приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (12x^2 - 12x)\Delta x + (12x + 6)(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3$. Видно, что $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для любого x из области определения функции $(-\infty; \infty)$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна для любого x из области определения. Найдем отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = (12x^2 - 12x) + (12x + 6)\Delta x + 4(\Delta x)^2$. Видно, что это отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 12x^2 - 12x$ при $\Delta x \to 0$. Тогда по определению $f'(x) = 12x^2 - 12x$.

Ответ: $f'(x) = 12x^2 - 12x$.

2. Для вычисления предела функции разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^3 + 4x - 5} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2 - 3x - 3)}{(x-1)(x^2 + x + 5)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + x + 5} =$$

$$= \frac{1^2 - 3\cdot 1 - 3}{1^2 + 1 + 5} = -\frac{5}{7}.$$

Ответ: $-\dfrac{5}{7}$.

3а) Используем формулу для производной произведения функций и получим: $f'(x)=(2x^3+1)'(4x^4-2)+(2x^3+1)(4x^4-2)'=$ $=6x^2(4x^4-2)+(2x^3+1)\cdot 16x^3=56x^6+16x^3-12x^2$.

Ответ: $f'(x)=56x^6+16x^3-12x^2$.

3б) Применим правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x)=2\cdot 5\operatorname{ctg}^4(3x^2+2)\left(-\frac{1}{\sin^2(3x^2+2)}\right)\cdot 6x=-\frac{60x\cos^4(3x^2+2)}{\sin^6(3x^2+2)}.$$

Ответ: $f'(x)=-\dfrac{60x\cos^4(3x^2+2)}{\sin^6(3x^2+2)}$.

3в) Используем формулу для производной частного функций и производной сложной функции. Имеем:

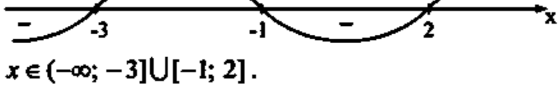
$$f'(x)=\frac{(2\cos 3x-3\sin x)'\cos 2x-(2\cos 3x-3\sin x)(\cos 2x)'}{\cos^2 2x}=$$

$$=\frac{(-6\sin 3x-3\cos x)\cos 2x-(2\cos 3x-3\sin x)(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x}=$$

$$=\frac{-6\sin 3x\cos 2x-3\cos x\cos 2x+4\cos 3x\sin 2x-6\sin x\sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$f'(x)=\frac{-6\sin 3x\cos 2x-3\cos x\cos 2x+4\cos 3x\sin 2x-6\sin x\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

4. Сначала найдем производные данных функций $f'(x)=12x^3-72$ и $g'(x)=60x-24x^2$. Получаем неравенство: $12x^3-72\le 60x-24x^2$ или $x^3+2x^2-5x-6\le 0$. Найдем корни кубического многочлена $x_1=-1$, $x_2=2$; $x_3=-3$ и разложим его на множители. Приходим к неравенству $(x+1)(x-2)(x+3)\le 0$. Решим его методом интервалов и получим $x\in(-\infty;-3]\cup[-1;2]$.



Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[-1;2]$.

§ 5. Применения непрерывности и производной

Уроки 68–69. Применения непрерывности

Цели: обсудить свойства непрерывности функций и обосновать метод интервалов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Ранее было дано определение **непрерывности функции в точке**. Если функция непрерывна **в каждой точке промежутка I**, то ее называют **непрерывной на промежутке I**. При этом промежуток I называют **промежутком непрерывности** функции $f(x)$. При переходе от одной точки этого промежутка к достаточно близкой точке значение функции меняется незначительно. Поэтому график функции $f(x)$ на этом промежутке I представляет собой непрерывную линию, которую можно «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

Как было показано раньше, функция $f(x)$, **дифференцируемая** в точке x_0, является **непрерывной** в этой же точке. Все дробно-рациональные, тригонометрические и обратные тригонометрические функции **дифференцируемы** во всех точках своих областей определения. Поэтому эти функции также **непрерывны** в каждой такой точке.

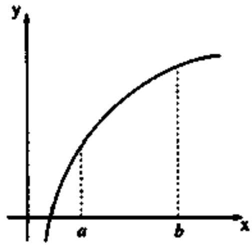
Пример 1

а) Функция $f(x) = 3\sin 5x$ определена на всей числовой прямой, дифференцируемая и непрерывна на ней.

б) Функция $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ определена при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, дифференцируемая и непрерывна в области определения.

в) Функция $f(x) = -2\,\mathrm{tg}\, x$ определена при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in Z$. В этой области определения функция дифференцируема и непрерывна.

Отметим важное **свойство** непрерывных функций: если на интервале $(a; b)$ **функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то** она на этом интервале **сохраняет постоянный знак.**



Докажем это утверждение способом от противного. Предположим, что найдутся такие точки x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$, что $f(x_1) > 0$ и $f(x_2) < 0$. Тогда непрерывная кривая – график функции $f(x)$ соединяет точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$. Точки A и B находятся по разные стороны от прямой $y = 0$. Поэтому график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в некоторой точке x_3 интервала $(a; b)$, то есть $f(x_3) = 0$. Это противоречит условию: функция $f(x)$ не обращается в нуль на интервале $(a; b)$. Поэтому исходное предположение, что функция $f(x)$ в некоторых точках x_1 и x_2 интервала $(a; b)$ имеет противоположные знаки, не верно. Следовательно, функция $f(x)$ на данном интервале сохраняет постоянный знак.

Пример 2

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2x - 8$. Нули этой функции $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. В соответствии с доказанным утверждением, например, на промежутке $(-3; 1)$ значения функции отрицательны, на интервале $(3; 7)$ – положительны.

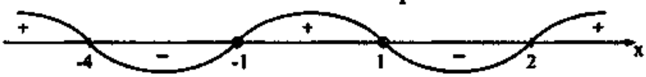
На рассмотренном свойстве непрерывных функций основан **метод решения неравенств** с одной переменной (**метод интервалов**). Обсудим его.

Пусть функция $f(x)$ **непрерывна** на интервале I и **обращается в нуль в конечном числе точек** этого промежутка. В соответствии с рассмотренным свойством этими точками I разбивается **на интервалы, в каждом из которых** непрерывная **функция** $f(x)$ **сохраняет** постоянный **знак**. Чтобы **определить** этот **знак**, достаточно **вычислить значение** функции $f(x)$ **в какой-либо одной точке из каждого** такого **интервала**.

Пример 3

Решим неравенство $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 1} \geq 0$.

Область определения функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 1}$ промежутки $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$. Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке области определения и обращается в нуль в точках $x = -4$ и $x = 2$. Отметим на координатной оси нули функции и точки, в которых знаменатель обращается в нуль ($x = \pm 1$). Они разбивают ось на пять интервалов, в каждом из которых функция непрерывна и не обращается в нуль. Поэтому на каждом промежутке функция сохраняет знак. Определим знак функции в этих интервалах. Неравенство нестрогое и числа $x = -4$ и $x = 2$ являются решениями.



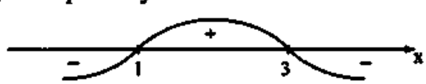
На основании диаграммы знаков выписываем ответ $x \in (-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup [2; \infty)$.

Метод интервалов является универсальным и используется при решении самых разных неравенств, в частности, неравенств, содержащих модули и параметры.

Пример 4

Решим неравенство $|2x-1| \ge |3x-4|$.

Найдем нули функции $f(x) = |2x-1| - |3x-4|$. Для этого решим уравнение: $|2x-1| - |3x-4| = 0$ или $|2x-1| = |3x-4|$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} 2x-1=3x-4 \\ 2x-1=-(3x-4) \end{array}\right.$, откуда $\left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=1 \end{array}\right.$. Отметим эти точки на координатной оси. Определим знак функции $f(x)$, например, при $x = 10$ и получим $f(10) = |2 \cdot 10 - 1| - |3 \cdot 10 - 4| = -7 < 0$. Проставим знаки в других промежутках. Выписываем ответ: $x \in [1; 3]$.

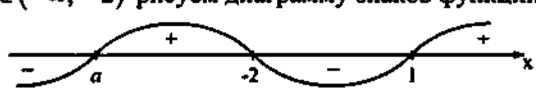


Пример 5

Решим неравенство $(x-a)(x+2)(x-1) \le 0$.

Найдем нули функции $f(x) = (x-a)(x+2)(x-1)$ и получим $x_1 = a$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Для построения диаграммы знаков функции $f(x)$ необходимо знать расположение точки $x = a$ по отношению к точкам $x_1 = a$, $x = -2$ и $x = 1$. Поэтому необходимо рассмотреть пять случаев. Учтем, что при больших положительных x независимо от параметра a значения функции $f(x)$ положительны.

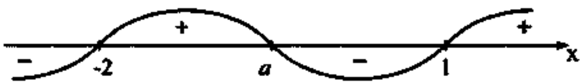
а) Для $a \in (-\infty; -2)$ рисуем диаграмму знаков функции.



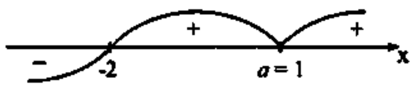
Получаем ответ в этом случае $x \in (-\infty; a] \cup [-2; 1]$.

б) Для $a = -2$ учтем, что нуль функции $x = -2$ имеет вторую кратность и при проходе через него знак функции не меняется. Имеем диаграмму знаков. Записываем ответ $x \in (-\infty; 1]$.

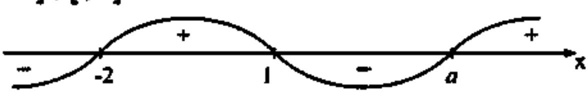
в) Для $a \in (-2; 1)$ получаем диаграмму знаков и выписываем ответ $x \in (-\infty; -2] \cup [a; 1]$.



г) Для $a = 1$ учтем, что нуль функции $x = 1$ имеет вторую кратность и при проходе через него знак функции не меняется. Получаем диаграмму знаков и записываем ответ $x \in (-\infty; -2] \cup \{1\}$.

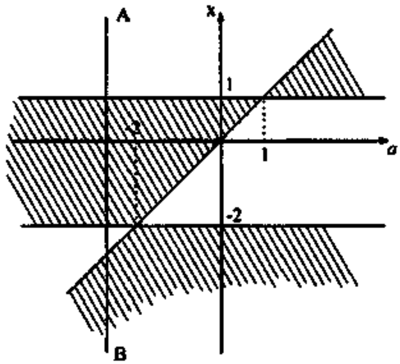


д) Для $a \in (1; \infty)$ имеем диаграмму знаков и выписываем ответ $x \in (-\infty; -2] \cup [1; a]$.



Видно, что в пяти рассмотренных случаях в зависимости от параметра a получается различный ответ. Приведем его: при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in (-\infty; a] \cup [-2; 1]$; при $a = -2$ $x \in (-\infty; 1]$; при $a \in (-2; 1)$ $x \in (-\infty; -2] \cup [a; 1]$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; -2] \cup \{1\}$; при $a \in (1; \infty)$ $x \in (-\infty; -2] \cup [1; a]$.

Заметим, что можно предложить другой способ подобных задач. Для этого в системе координат aOx построим прямые $x = a$, $x = -2$, $x = 1$, на которых происходит изменение знака функции $f(x)$. Заштрихуем множество $(a; x)$, для которых значения $f(x) \le 0$, то есть фактически используем метод интервалов на координатной плоскости. Тогда из приведенной диаграммы сразу можно выписать ответ (все пять случаев). Например, при $a < -2$ (Прямая AB) получаем $x \in (-\infty; a] \cup [-2; 1]$.



Метод интервалов можно использовать, например, для нахождения корней уравнений с наперед заданной точностью.

Пример 6

Найдем корень уравнения $x^3+3x^2-1=0$ на промежутке [0; 1] с точностью до 0,1.

Функция $f(x)=x^3+3x^2-1$ непрерывна, поэтому достаточно найти отрезок длиной 0,2, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Так как $f(0)=-1<0$ и $f(1)=3>0$, то на отрезке [0; 1] уравнение имеет корень. Найдем $f(0{,}2)=-0{,}872$, $f(0{,}4)=-0{,}456$, $f(0{,}6)=0{,}296$. Так как $f(0{,}4)<0$ и $f(0{,}6)>0$, то корень лежит на отрезке [0,4; 0,6]. Теперь его можно найти с заданной точностью $x\approx 0{,}5$.

Не надо думать, что в алгебре рассматриваются только непрерывные функции. Встречаются и функции, имеющие разрывы.

Пример 7

Рассмотрим функцию $f(x)=[x]$ – целая часть числа x.

Целой частью $[x]$ числа x является целое число, ближайшее к числу x и также, что $[x]\le x$. Например, $[0{,}38]=0$, $[-3{,}27]=-4$, $[1]=1$.

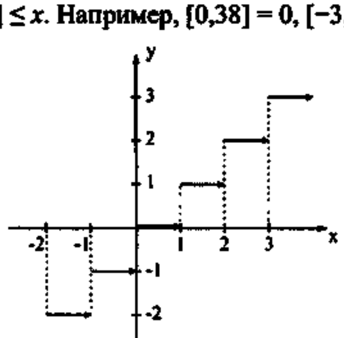


График функции $f(x)=[x]$ приведен на рисунке (стрелками указаны точки, которые в график не входят). Видно, что при $x=n$ (где $n\in Z$)

функция имеет разрывы. При этом функция $f(x)$ определена на всей числовой оси.

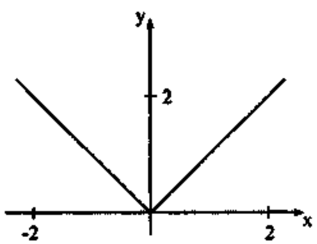
Покажем аналитически, что функция $f(x)$ разрывна в точках $x_0 = n$. Рассмотрим приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Если $\Delta x > 0$, то $\Delta f = 0$. Если $\Delta x < 0$, то $\Delta f = -1$. Для непрерывной функции $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В нашем случае это условие нарушено. Следовательно, функция $f(x)$ имеет разрывы.

Функция $f(x)$ может быть **непрерывной**, но **не дифференцируемой** в данной точке.

Пример 8

Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ – модуль числа x.

Напомним, что $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Рассмотрим график этой функции. Для любого $x > 0$ $f(x) = x$ и $f'(x) = 1$. Для любого $x < 0$ $f(x) = -x$ и $f'(x) = -1$. В точке $x = 0$ данная функция не имеет производной.



Докажем это методом от противного. Допустим, что данная функция $f(x)$ имеет производную при $x = 0$, то есть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ стремится к некоторому числу A при $\Delta x \to 0$. Тогда при всех достаточно малых Δx значения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ близки к A, то есть при малых значениях Δx должно выполняться неравенство $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x} - A\right| < h$ (где $h > 0$).

При $\Delta x > 0$ величина $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1$ и должно выполняться неравенство $|1 - A| < h$, откуда $-h < A - 1 < h$ и $1 - h < A < 1 + h$.

При $\Delta x < 0$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -1$ и должно выполняться неравенство $|-1 - A| < h$, откуда $-h < A + 1 < h$ и $-1 - h < A < -1 + h$.

Возьмем для оценок $h = 0{,}1$. Тогда полученные неравенства $1 - h < A < 1 + h$ и $-1 - h < A < -1 + h$ принимают вид $0{,}9 < A < 1{,}1$ и $-1{,}1 < A < -0{,}9$ и противоречат друг другу, так как не существует чисел A, удовлетворяющих этим неравенствам. Таким образом, предположение о существовании производной функции $f(x)$ при $x = 0$ неверно.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0 \\ \text{не существует при } x = 0. \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$

III. Задание на уроке

№ 241 (а, б); 242 (б, в); 243 (а); 244 (а, б); 245 (в, г); 246 (а, б); 247 (в, г); 248 (а); 250 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте свойство непрерывных функций.
2. Опишите метод интервалов решения неравенств.
3. Приведите пример функции, определенной на всей числовой оси и не являющейся непрерывной.
4. Приведите пример функции, определенной и непрерывной на всей числовой оси и не являющейся дифференцируемой в точке.

V. Задание на дом

№ 241 (в, г); 242 (а, г); 243 (в); 244 (в, г); 245 (а, б); 246 (в, г); 247 (а, б); 248 (б); 250 (б).

VI. Творческие задания

Методом интервалов решите неравенство:

1) $(|x-2|-1)(x+3) \geq 0$; 2) $(|x-1|-2)(x+2) \leq 0$;

3) $\dfrac{|x|-3}{x+2} \leq 0$; 4) $\dfrac{x+4}{|x|-2} \geq 0$;

5) $(2x-a)(x+1) > 0$; 6) $(a-3x)(x+2) > 0$;

7) $(x-a)(x+2a) \geq 0$; 8) $(x-3a)(x+a) \leq 0$;

9) $\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-5} \leq 0$; 10) $\dfrac{x-7}{\sqrt{x-1}-2} \geq 0$.

Ответы:

1) $-3 \leq x \leq 1,\ x \geq 3$; 2) $x \leq -2,\ -1 \leq x \leq 3$; 3) $x \leq -3,\ -2 < x \leq 3$;

4) $-4 \leq x < -2,\ x > 2$; 5) при $a < -2$ $x < \dfrac{a}{2},\ x > -1$; при $a = -2$ $x < -1$, $x > -1$; при $a > -2$ $x < -1,\ x > \dfrac{a}{2}$; 6) при $a < -6$ $\dfrac{a}{3} < x < -2$; при $a = -6$

решений нет; при $a > -6$ $-2 < x < \frac{a}{3}$; 7) при $a < 0$ $x \le a$, $x \ge -2a$; при $a = 0$ x – любое число; при $a > 0$ $x \le -2a$, $x \ge a$; 8) при $a < 0$ $3a \le x \le -a$; при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 0$ $-a \le x \le 3a$; 9) $3 \le x < 5$; 10) $1 \le x < 5, x \ge 7$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 70–72. Касательная к графику функции

Цели: рассмотреть понятие и уравнение касательной к графику функции, обсудить формулу Лагранжа.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Является ли функция $f(x)$ непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, если:

а) $f(x) = 3\sin \pi x - 5\cos 2\pi x$; б) $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ при } x > 1 \\ 4 - x^2 \text{ при } x \le 1 \end{cases}$.

2. Методом интервалов решите неравенство:

а) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 4} \le 0$; б) $x^2 - (a+3)x + 3x \ge 0$.

Вариант 2

1. Является ли функция $f(x)$ непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, если:

а) $f(x) = 5\sin 2\pi x - 2\cos \pi x$; б) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ при } x > 0 \\ 1 + x^2 \text{ при } x \le 0 \end{cases}$.

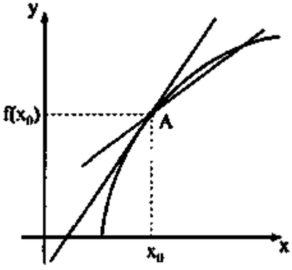
2. Методом интервалов решите неравенство:

а) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x + 3} \ge 0$; б) $x^2 - (a-2)x - 2x \le 0$.

III. Изучение нового материала

Понятие касательной уже рассматривалось ранее. Было показано, что график дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ вблизи

x_0 практически не отличается от графика касательной, а значит он близок к секущей, проходящей через точки $(x_0;\ f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$. Любая из таких секущих проходит через точку $A(x_0;\ f(x_0))$. Чтобы написать уравнение касательной, надо задать ее угловой коэффициент. Угловой коэффициент секущей $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к числу $f'(x_0)$, которое является **угловым коэффициентом касательной**. Поэтому говорят, что **касательная есть предельное положение секущей** при $\Delta x \to 0$.



Теперь получим **уравнение касательной** к графику функции $f(x)$. Так как касательная является прямой и ее угловой коэффициент $f'(x_0)$, то можно записать ее уравнение $y = f'(x_0)\cdot x + b$. Найдем коэффициент b из условия, что касательная проходит через точку $A(x_0;\ f(x_0))$. Подставим координаты этой точки в уравнение касательной и получим $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Теперь подставим найденное значение b в уравнение касательной и имеем: $y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$ или $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Это и есть **уравнение касательной. Обсудим применение уравнения касательной.**

Пример 1

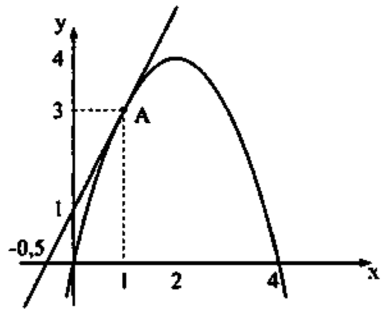
Под каким углом синусоида $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

Угол, под которым график данной функции пересекает ось абсцисс, равен углу наклона α касательной, приведенной к графику функции $f(x)$ в этой точке. Найдем производную $f'(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x\cdot 3 = \sqrt{3}\cos 3x$. Учитывая геометрический смысл производной, имеем $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = f'(0) = \sqrt{3}\cos 0 = \sqrt{3}$ и $\alpha = 60°$.

Пример 2

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4x$ в точке $x_0 = 1$.

Найдем производную данной функции $f'(x) = (-x^2 + 4x)' = -2x + 4$. Вычислим значения производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ и получим $f'(x_0) = f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$ и $f(x_0) = f(1) = -2^2 + 4 \cdot 1 = 3$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем $y = 2(x-1) + 3$ или $y = 2x + 1$.

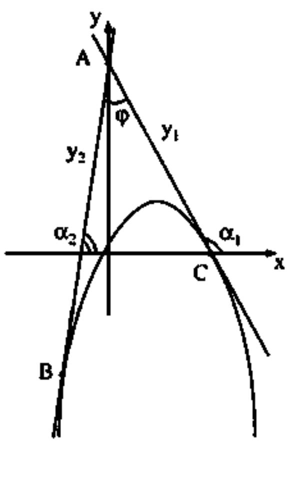


Для наглядности на рисунке приведены графики функций $f(x)$ и касательной к этой функции. Касание происходит в точке $A(1; 3)$.

В этом примере абсцисса x_0 точки касания была задана напрямую. Во многих случаях **точка касания** определяется **различными дополнительными условиями.**

Пример 3

Написать уравнения касательных, приведенных из точки $A(0; 4)$ к графику функции $f(x) = -x^2 + 2x$.



Легко проверить, что точка A не лежит на параболе. Вместе с тем неизвестны точки касания параболы и касательных. Поэтому для нахождения этих точек будет использовано дополнительное условие – прохождение касательных через точку A.

Предположим, что касание происходит в точке x_0. Найдем производную функции $f'(x)=(-x^2+2x)'=-2x+2$. Вычислим значения производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке касания x_0 и получим $f'(x_0)=-2x_0+2$ и $f(x_0)=-x_0^2+2x_0$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем $y=(-2x_0+2)(x-x_0)+(-x_0^2+2x_0)$ или $y=(-2x_0+2)x+x_0^2$. Это уравнение касательной.

Запишем условие прохождения касательной через точку A, подставив координаты этой точки. Получаем: $4=(-2x_0+2)\cdot 0+x_0^2$ или $4=x_0^2$, откуда $x_0=\pm 2$. Таким образом, касание происходит в двух точках $B(-2;\ -8)$ и $C(2;\ 0)$. Поэтому таких касательных будет две. Найдем их уравнения. Подставим значения $x_0=\pm 2$ в уравнение касательной. Получаем: при $x_0=2$ $y_1=(-2\cdot 2+2)x+2^2$ или $y_1=-2x+4$; при $x_0=-2$ $y_2=(-2\cdot(-2)+2)x+(-2)^2$ или $y_2=6x+4$. Итак, уравнения касательных $y_1=-2x+4$ и $y_2=6x+4$.

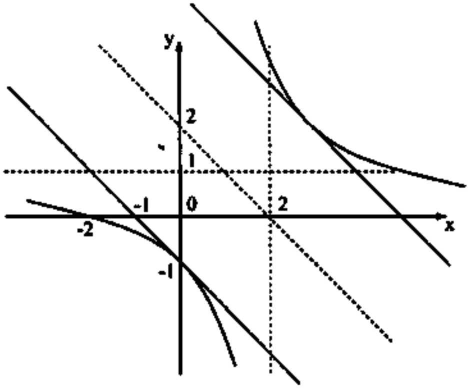
Пример 4

Найдем угол между касательными в условиях предыдущей задачи.

Проведенные касательные $y_1=-2x+4$ и $y_2=6x+4$ составляют с положительным направлением оси абсцисс углы α_1 и α_2 (причем $\operatorname{tg}\alpha_1=-2$ и $\operatorname{tg}\alpha_2=6$) и между собой угол $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$. Найдем, используя известную формулу, $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\dfrac{-2-6}{1+(-2)\cdot 6}=\dfrac{8}{11}$, откуда $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{8}{11}$.

Пример 5

Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$, параллельной прямой $y=-x+2$.

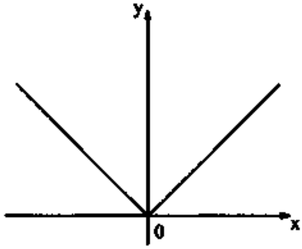


Две прямые параллельны друг другу, если они имеют равные угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой $y=-x+2$ равен -1, угловой коэффициент искомой касательной равен $f'(x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Поэтому для определения x_0 имеем дополнительное условие $f'(x_0)=-1$.

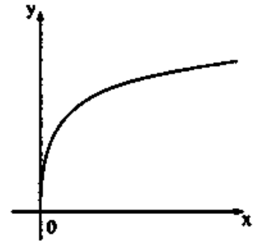
Используя формулу для производной частного функций, найдем производную $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)'=\dfrac{(x+2)'(x-2)-(x+2)(x-2)'}{(x-2)^2}=$ $=\dfrac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2}=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$. Найдем значение производной в точке x_0 и получим $f'(x_0)=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2}$.

Получаем уравнение: $-1=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2}$ или $(x_0-2)^2=4$ или $x_0-2=\pm 2$, откуда $x_0=4$ и $x_0=0$. Таким образом, существуют две касательные, удовлетворяющие условиям задачи. Подставим значения $x_0=4$ и $x_0=0$ в уравнение касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. При $x_0=4$ имеем $f(4)=\dfrac{4+2}{4-2}=3$ и касательная $y_1=-(x-4)+3$ или $y_1=-x+7$. При $x_0=0$ получаем $f(0)=\dfrac{0+2}{0-2}=-1$ и касательная $y_2=-(x-0)-1$ или $y_2=-x-1$. Итак, уравнения касательных $y_1=-x+7$ и $y_2=-x-1$.

Заметим, что если $f'(x_0)$ **не существует**, то **касательная** или **не существует** (как у функции $f(x)=|x|$ в точке $(0;0)$ – рис. а) или **вертикальна** (как у функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке $(0;0)$ – рис. б).



а)

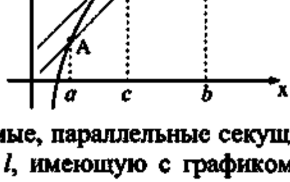


б)

Итак, **существование производной** функции $f(x)$ в точке x_0 **эквивалентно существованию невертикальной касательной** в точке $(x_0; f(x_0))$ графика. При этом **угловой коэффициент касательной** равен $f'(x_0)$. В этом заключается **геометрический смысл производной**.

В заключение этого урока обсудим **формулу Лагранжа**. Заметим, что этот материал (на наш взгляд) является совсем необязательным для изучения в 10 классе.

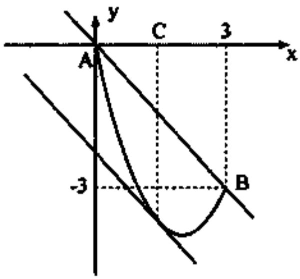
Рассмотрим график функции $f(x)$, точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, расположенные на нем. Построим секущую AB. Покажем, что **на промежутке (a, b) найдется** такая **точка $x = C$, касательная в которой параллельна секущей** AB и $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Будем строить прямые, параллельные секущей AB. Рано или поздно получим прямую l, имеющую с графиком функции $f(x)$ только **одну общую точку** C. Тогда прямая l по определению является **касательной** к графику функции $f(x)$. Видно, что абсцисса $x = c$ точки C принадлежит промежутку $(a; b)$. Раз прямые AB и l параллельны, то их **угловые коэффициенты равны**. Угловой коэффициент касательной равен $f'(c)$, секущей – $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Приравняв эти выражения, получим **формулу Лагранжа**: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Пример 6

Найти абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = x^2 - 4x$ параллельна секущей *AB*, если *A*(0; 0) и *B*(3; −3). Написать уравнение касательной.



Для наглядности построим график функции *f*(*x*) на промежутке [0; 3] и секущую *AB*. Воспользуемся формулой Лагранжа $f'(c) = \dfrac{-3-0}{3-0} = -1$. Найдем производную функции *f*(*x*) и получим $f'(x) = 2x - 4$. В точке *c* значение этой производной $f'(c) = 2c - 4$. Получаем уравнение $2c - 4 = -1$, откуда $c = \dfrac{3}{2}$. Видно, что точка *c* лежит на промежутке (0; 3).

Теперь напишем уравнение касательной. Найдем значения производной $f'(x)$ и самой функции *f*(*x*) в точке касания и получим $f'(c) = f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -1$ и $f(c) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{15}{4}$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем $y = -1 \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{15}{4}$ или $y = -x - \dfrac{9}{4}$. Итак, уравнение касательной $y = -x - \dfrac{9}{4}$.

IV. Задание на уроке

№ 251; 253 (а, в); 254 (б, г); 255 (а, в); 256 (б, г); 257 (а); 258 (б); 259 (а, б); 260 (в, г).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение касательной к графику функции.
2. Поясните геометрический смысл производной функции.
3. Выведите уравнение касательной к графику функции.
4. Поясните и выведите формулу Лагранжа.

VI. Задание на дом

№ 252; 253 (б, г); 254 (а, в); 255 (б, г); 256 (а, в); 257 (в); 258 (в); 259 (в, г); 260 (а, б).

VII. Творческие задания

1. В каких точках x касательные к графикам функций $y = x^3 - x^2 - x - 4$ и $y = \frac{2}{3}x^3 + 2x$ параллельны?

Ответ: $x = -1, x = 3$.

2. При каких x касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x - 7$ и $y = 5\cos 3x + 4$ параллельны?

Ответ: $x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$, где $n \in Z$.

3. Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$?

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

4. Под какими углами пересекаются кривые $y = \cos x$ и $y = \sin x$?

Ответ: $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

5. К параболе $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью ординат.

Ответ: (0; 5).

6. К параболе $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью абсцисс.

Ответ: $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$.

7. Найдите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; −2) к параболе $y = x^2$.

Ответ: $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{8}$.

8. К графику функции $y = 3x^2 + 3x + 2$ проведены касательные с угловыми коэффициентами $k_1 = 0$ и $k_2 = 15$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки касания.

Ответ: $y = 12x - 4$.

9. Найдите уравнения прямых, касающихся одновременно парабол $y = x^2 + x - 2$ и $y = -x^2 + 7x - 11$.

Ответ: $y = 7x - 11$ и $y = x - 2$.

10. Напишите уравнение общей касательной к параболам $y=-3x^2+4x+4$ и $y=-3x^2+16x-20$.

Ответ: $y=-2x+7$.

11. Касательная к графику функции $y=x^2-4x-3$ проведена в точке $x=0$. Найти площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

Ответ: $\frac{9}{8}$.

12. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\sqrt{2x^2-4}$ в точке $x=2$.

Ответ: 1.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 73. Приближенные вычисления

Цель: рассмотреть способ приближенных вычислений с помощью производной.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Напишите уравнение касательной к параболе $f(x)=2x^2-4x+7$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Ответ: а) $y=8x-12$; б) $y=12x-25$; в) $y=16x-8$.

2. Найдите угол между касательными, проведенными из точки $A(0;-6)$ к кривой $f(x)=2x^2+2$.

Ответ: а) arctg 6; б) π – arctg 8; в) π – 2 arctg 8.

Вариант 2

1. Напишите уравнение касательной к параболе $f(x)=3x^2+x-4$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Ответ: а) $y=18x-15$; б) $y=12x-21$; в) $y=19x-31$.

2. Найдите угол между касательными, проведенными из точки $A(0;-2)$ к кривой $f(x)=3x^2+1$.

Ответ: а) arctg 3; б) π – 2 arctg 6; в) π – arctg 6.

III. Изучение нового материала

Понятие производной позволяет проводить **приближенные вычисления**. Уже неоднократно отмечалось, что при $\Delta x \to 0$ **значения функции** $f(x)$ **и касательной** к ней $y(x)$ практически **совпадают**. Поэтому при $\Delta x \to 0$ поведение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 **приближенно** можно описать **формулой** $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ (фактически уравнение касательной). Эта формула с успехом используется для приближенных вычислений.

Пример 1

Вычислим значение функции $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ в точке $x = 2{,}03$.

Найдем производную данной функции $f'(x) = 12x^2 - 4x + 3$. Будем считать, что $x = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}03$. Вычислим значения функции и ее производной в точке x_0 и получим $f(x_0) = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 35$ и $f'(x_0) = 12 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 43$. Теперь определим значение функции в заданной точке $x = 2{,}03$. Имеем: $f(2{,}03) = 35 + 43 \cdot 0{,}03 = 35 + 1{,}29 = 36{,}29$.

Разумеется, приведенную формулу удобно использовать, если значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ легко вычислить.

Пример 2

Вычислим $\sqrt[3]{8{,}03}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Будем считать, что $x = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}03$. Вычислим значения функции и ее производной в точке x_0 и получим $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{8} = 2$ и $f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(x_0^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \frac{1}{3}(2)^{-2} = \frac{1}{12}$. Теперь определим значение функции в заданной точке $x = 8{,}03$. Имеем: $f(8{,}03) = 2 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}03 = 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025$.

Пример 3

Обобщим полученный результат. Рассмотрим степенную функцию $f(x) = x^n$ и будем считать, что $x = x_0 + \Delta x$ и $\Delta x \to 0$. Найдем $f'(x) = nx^{n-1}$ и вычислим значения функции и ее производной в точке x_0 и получим $f(x_0) = x_0^n$ и $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. Теперь имеем формулу $f(x) = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x$. Применим эту формулу для вычисления числа $0{,}98^{-20}$. Будем считать, что $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}02$ и $n = -20$. Тогда получаем $0{,}98^{-20} = 1^{-20} - 20 \cdot 1^{-21} \cdot (-0{,}02) = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$.

Разумеется, приведенную формулу можно использовать и для любых других функций, в частности, тригонометрических.

Пример 4

Вычислим tg 48°.

Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{tg} x$ и найдем производную $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Будем считать, что $x=x_0+\Delta x$, где $x_0=45°=\dfrac{\pi}{4}$ и $\Delta x=3°=3\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{60}$ (еще раз обратим внимание на то, что в тригонометрии углы обычно измеряют в радианах). Найдем значения функции и ее производной в точке x_0 и получим $f(x_0)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$ и $f'(x_0)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=2$. Теперь вычислим $\operatorname{tg} 48°=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{60}\right)=1+2\cdot\dfrac{\pi}{60}=1+\dfrac{\pi}{30}\approx 1+0{,}105=1{,}105$ (учтено, что $\pi\approx 3{,}14$).

IV. Задание на уроке

№ 261 (в, г); 262 (в, г); 263 (а, в); 264 (а, в); 265 (б, г); 266 (а, г).

V. Задание на дом

№ 261 (в, г); 262 (а, б); 263 (б, г); 264 (б, г); 265 (а, в); 266 (б, в).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 74–75. Производная в физике и технике

Цели: рассмотреть механический смысл производной и ее использование в физике и технике.

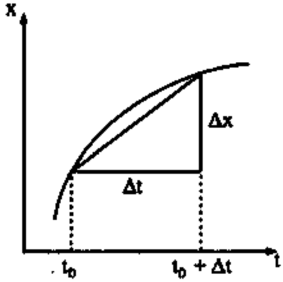
Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала (ответы на вопросы по домашнему заданию – разбор нерешенных задач)

III. Изучение нового материала

Напомним определение мгновеной скорости тела $V_{мгн}(t)$. Пусть дана зависимость перемещения x тела от времени t. Тогда отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=V_{ср}$ – средняя скорость движения тела за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Если $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$. Эту величину и называют мгновенной скоростью тела в момент времени t_0, то есть $x'(t_0) = V_{мгн}(t_0)$.



Итак, производная от координаты по времени есть мгновенная скорость. В этом заключается **механический смысл производной.**

Мгновенная скорость может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Если скорость в течение какого-то промежутка времени $(t_1;\ t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, то есть координата x возрастает. Если скорость отрицательна, то координата убывает.

Аналогичная ситуация складывается и с ускорением тела. Скорость движения точки есть функция от времени, то есть $V(t)$. Производная этой функции называется ускорением $a = V'(t)$. **Производная от скорости по времени есть ускорение.**

Пример 1

Координата тела меняется по закону $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 3$. Определите скорость V и ускорение a тела в момент времени $t = 1$. Найдите моменты времени, в которые скорость или ускорение тела равны нулю. Дайте общую характеристику движения тела.

Сначала найдем скорость тела $V(t) = x'(t) = 6t^2 - 30t + 36 = 6(t^2 - 5t + 6)$. В момент времени $t = 1$ находим $V(1) = 12$. Скорость $V(t) = 0$ при $t = 2$ и $t = 3$. Скорость $V(t) > 0$ при $t \in [0;\ 2) \cup (3;\ \infty)$ и $V(t) < 0$ при $t \in (2;\ 3)$. Поэтому при $t \in [0;\ 2)$ координата x возрастает. При $t = 2$ тело останавливается, так как $V = 0$. При $t \in (2;\ 3)$ тело движется в противоположном направлении (то есть координата x уменьшается), так как $V < 0$. При $t = 3$ тело вновь останавливается. Затем при $t > 0$ тело снова движется в противоположном направлении, то есть координата x растет.

Найдем теперь ускорение тела $a(t)=V'(t)=(6t^2-30t+36)'=$ $=12t-30$. В момент времени $t=1$ получаем $a(1)=-18$. Ускорение $a(t)=0$ в момент времени $t=\frac{30}{12}=2{,}5$. Заметим, что в этот момент времени скорость тела минимальна и равна $V(2{,}5)=6(2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+6)=-1{,}5$.

Пример 2

Смещение груза на пружине описывается законом $x(t)=$ $=5\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$. Найти скорость V и ускорение a тела в момент $t=\frac{\pi}{2}$.

Сначала найдем скорость тела $V(t)=x'(t)=\left(5\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=$ $=10\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$. Определим скорость при $t=\frac{\pi}{2}$ и получим $V\left(\frac{\pi}{2}\right)=10\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-10\cos\frac{\pi}{4}=-10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-5\sqrt{2}$.

Теперь найдем ускорение груза $a(t)=V'(t)=\left(10\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=$ $=-20\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$. Определим ускорение при $t=\frac{\pi}{2}$. Имеем $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-20\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=20\sin\frac{\pi}{4}=20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$.

Заметим, что в условиях этой задачи тело совершает колебательные движения и все три основные характеристики $x(t)$, $V(t)$ и $a(t)$ меняются по синусоидальным законам.

Пример 3

Точка с массой m движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{2}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу перемещения.

Сила F, действующая на тело, равна ma (где a – ускорение тела). Найдем скорость тела $V(t)=x'(t)=(2(2t-1)^{-1})'=$ $=2(-1)(2t-1)^{-2}\cdot(2t-1)'=-4(2t-1)^{-2}$ и его ускорение $a(t)=(-4(2t-1)^{-2})'=$ $=-4\cdot(-2)(2t-1)^{-3}(2t-1)'=16(2t-1)^{-3}=\frac{16}{(2t-1)^3}$. Учтем, что $x=\frac{2}{2t-1}$

и ускорение $a = 2x^3$. Сила, действующая на тело, $F = ma = m \cdot 2x^3 = 2mx^3$. Видно, что эта сила пропорциональна кубу перемещения.

С другими применениями производной в физике и технике можно ознакомиться по учебнику. Также с подобными применениями мы будем встречаться в следующем разделе.

IV. Задание на уроке

№ 267; 269; 272; 273; 276; 278.

V. Задание на дом

№ 268; 270; 271; 274; 275; 277.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 76–77. Контрольная работа по теме «Применение непрерывности и производной»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Является ли функция $f(x)=2x^2-x+3\sin\pi x$ непрерывной в точке $x=3$?

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{3x^2-6x}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $\dfrac{x+2}{x^2+x-2}\ge 0$.

4. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x)=2\sin x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2+2x-1$ в точке $x_0=1$.

6. Тело движется по закону $x(t)=2t^2-8t+7$. Определите момент времени, когда скорость тела равна нулю.

Вариант 2

1. Является ли функция $f(x)=3x^2+2x-2\cos\pi x$ непрерывной в точке $x=2$?

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{4x-2x^2}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}\le 0$.

4. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x)=4\cos x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2-3x+1$ в точке $x_0=2$.

6. Тело движется по закону $x(t)=3t^2-12t+8$. Определите момент времени, когда скорость тела равна нулю.

Вариант 3

1. Является ли функция $f(x)=\begin{cases}3x-1 \text{ при } x<1\\ x+1 \text{ при } x\ge 1\end{cases}$ непрерывной в точке $x=1$?

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\le 0$.

4. Найдите все значения x, при которых касательные к графикам функций $y = 3\sin 7x + 2$ и $y = 7\sin 3x - 1$ параллельны.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 3\sin 2x$ в точке $x_0 = \pi$.

6. Тело движется по закону $x(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t + 3$. Определите скорость и ускорение тела в момент времени $t = 2$.

Вариант 4

1. Является ли функция $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 \text{ при } x < 2 \\ 3x + 1 \text{ при } x \geq 2 \end{cases}$ непрерывной в точке $x = 2$?

2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{3x+2}}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leq 0$.

4. Найдите все значения x, при которых касательные к графикам функций $y = 5\cos 7x - 3$ и $y = 7\cos 5x + 1$ параллельны.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 4\sin 3x$ в точке $x_0 = \pi$.

6. Тело движется по закону $x(t) = 3t^3 - 4t^2 + 8t + 1$. Определите скорость и ускорение тела в момент времени $t = 1$.

Вариант 5

1. При каком значении a функция $f(x) = \begin{cases} 2ax - 1 \text{ при } x < 1 \\ 3x + a \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси?

2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\sin 2x - \sin x}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $x^2 - 6x + 8 - 2a - a^2 \geq 0$.

4. Под какими углами прямая $y = 5x - 6$ пересекает параболу $y = x^2$?

5. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к параболе $f(x) = 4x - x^2$ в точке $x_0 = 3$?

6. Тело движется по закону $x(t) = 10\sin\left(4t + \dfrac{\pi}{6}\right)$. Определите скорость и ускорение тела в момент времени $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 6

1. При каком значении a функция $f(x)=\begin{cases}3ax-2 \text{ при } x<1\\ 4x+2a \text{ при } x\ge 1\end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси?

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\sin 2x+\cos x}$.

3. Методом интервалов решите неравенство $x^2-4x+3-2a-a^2\le 0$.

4. Под какими углами прямая $y=4x-3$ пересекает параболу $y=x^2$?

5. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к параболе $f(x)=x^2+3x$ в точке $x_0=-2$?

6. Тело движется по закону $x(t)=20\cos\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)$. Определите скорость и ускорение тела в момент времени $t=\frac{\pi}{6}$.

Урок 78. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: непрерывна.
2. *Ответ*: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$.
3. *Ответ*: $x \in (1; \infty)$.
4. *Ответ*: 1.
5. *Ответ*: $y = 4x - 6$.
6. *Ответ*: $t = 2$.

Вариант 2

1. *Ответ*: непрерывна.
2. *Ответ*: $x \in [0; 2]$.
3. *Ответ*: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$.
4. *Ответ*: −2.
5. *Ответ*: $y = x - 3$.
6. *Ответ*: $t = 2$.

Вариант 3

1. *Ответ*: непрерывна.
2. *Ответ*: $x \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.
3. *Ответ*: $x \in (1; 2) \cup (2; 3]$.
4. *Ответ*: $x = \frac{\pi}{2}n$ и $x = \frac{\pi}{4}n$, где $n \in Z$.
5. *Ответ*: $y = 6(x - \pi)$.
6. *Ответ*: $V = 2$, $a = 14$.

Вариант 4

1. *Ответ*: непрерывна.
2. *Ответ*: $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup [1; \infty)$.
3. *Ответ*: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 3]$.
4. *Ответ*: $x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n$, где $n \in Z$.

5. *Ответ*: $y = 12(\pi - x)$.

6. *Ответ*: $V = 5$, $a = 6$.

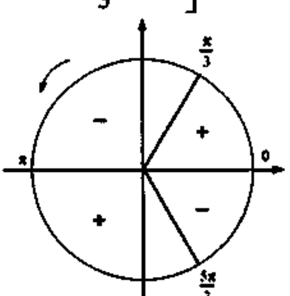
Решения

Вариант 5

1. Очевидно, что при $x < 1$ и $x > 1$ функция $f(x)$ непрерывна, так как является линейной. Только при $x = 1$ возможен разрыв функции. Видно, что значение $f(1) = 3 \cdot 1 + a = 3 + a$. При $x \to 1$ и $x < 1$ имеем $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2ax - 1) = 2a - 1$. Чтобы функция была непрерывной при $x = 1$, должно выполняться условие $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ или $3 + a = 2a - 1$, откуда $a = 4$. Итак, при $a = 4$ данная функция непрерывна на всей числовой оси.

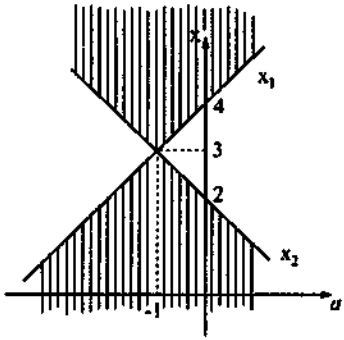
Ответ: $a = 4$.

2. Область определения данной функции задается условием $\sin 2x - \sin x \geq 0$. Используя формулу для синуса двойного угла, решим это неравенство методом интервалов. Имеем: $2\sin x \cos x - \sin x \geq 0$ или $\sin x\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) \geq 0$. В промежутке $[0; 2\pi]$ найдем корни этого выражения $\left(0; \dfrac{\pi}{3}; \pi; \dfrac{5\pi}{3}\right)$ и отметим их на единичной окружности. Например, при $x = \dfrac{\pi}{2}$ определим знак данного выражения: $\sin\dfrac{\pi}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} < 0$ и расставим знаки. На основании диаграммы запишем решение неравенства $x \in \left[2\pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.



Ответ: $x \in \left[2\pi n; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[\pi + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

3. Для решения неравенства $x^2-6x+8-2a-a^2\geq 0$ прежде всего найдем корни квадратного трехчлена и получим $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8+2a+a^2}=3\pm\sqrt{(a+1)^2}=3\pm(a+1)$ или $x_1=4+a$ и $x_2=2-a$. В системе координат aOx построим поведение этих корней. Определив, например, знак выражения $x^2-6x+8-2a-a^2$ при $x=0$, $a=0$, заштрихуем множество точек $(a;x)$, для которых выполняется данное неравенство.



На основании такой диаграммы записываем *ответ*: при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in(-\infty;4+a]\cup[2-a;\infty)$; при $a=1$ $x\in(-\infty;\infty)$; при $a\in(1;\infty)$ $x\in(-\infty;2-a]\cup[4+a;\infty)$.

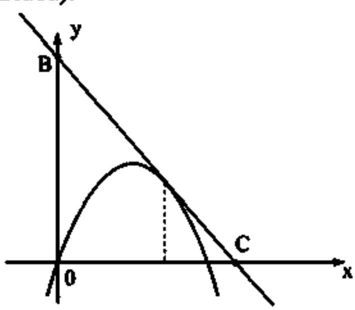
4. По определению угол, под которым пересекаются две кривые, совпадает с углом, под которым пересекаются касательные к этим кривым, проведенные в точке пересечения. Найдем точки пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $y=5x-6$. Получаем уравнение $x^2=5x-6$ или $x^2-5x+6=0$, корни которого $x_1=2$ и $x_2=3$ (то есть точки пересечения имеют найденные абсциссы).

Угловой коэффициент прямой является величиной постоянной $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1=5$. Угловой коэффициент касательной к параболе равен $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2=y'(x)=2x$ (то есть для точки $x=2k_2=4$, для точки $x=3$ $k_2=6$). Тогда прямая пересекает параболу под углом: в точке $x=2$ $\varphi=\alpha_1-\alpha_2=\operatorname{arctg}5-\operatorname{arctg}4=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{21}$, в точке $x=3$

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1=\operatorname{arctg}6-\operatorname{arctg}5=\operatorname{arctg}\frac{1}{31}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{21}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{31}$.

5. Сначала напишем уравнение касательной к параболе $f(x) = 4x - x^2$ в точке $x_0 = 3$. Найдем производную $f'(x) = 4 - 2x$. Вычислим значение производной и самой функции в точке x_0 и получим $f'(3) = -2$ и $f(3) = 3$. Тогда уравнение касательной $y = -2(x-3)+3$ или $y = -2x + 9$. Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат: с осью ординат – $y = 9$, с осью абсцисс – $x = \frac{9}{2}$. Тогда ΔBOC прямоугольный с катетами $OB = 9$ и $OC = 4{,}5 = \frac{9}{2}$ и его площадь равна $S = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20{,}25$ (рисунок выполнен с нарушением масштаба).



Ответ: 20,25.

6. Найдем сначала скорость тела $V(t) = x'(t) = \left(10\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = 40\cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$. В момент времени $t = \frac{\pi}{4}$ получаем $V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 40\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -40\cos\frac{\pi}{6} = -40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -20\sqrt{3}$. Теперь найдем ускорение тела $a(t) = V'(t) = \left(40\cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = -160\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$. В момент времени $t = \frac{\pi}{4}$ имеем $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -160\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 160\sin\frac{\pi}{6} = 160 \cdot \frac{1}{2} = 80$.

Ответ: $V = -20\sqrt{3}$, $a = 80$.

Вариант 6

1. Очевидно, что при $x < 1$ и $x > 1$ функция $f(x)$ непрерывна, так как является линейной. Только при $x = 1$ возможен разрыв функции. Видно, что значение $f(1) = 4 \cdot 1 + 2a = 4 + 2a$. При $x \to 1$ и $x < 1$ имеем $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(3ax - 2) = 3a - 2$. Чтобы функция была непрерывной при $x = 1$, должно выполняться условие $f(1) = \lim\limits_{x\to1} f(x)$ или $4 + 2a = 3a - 2$, откуда $a = 6$. Итак, при $a = 6$ данная функция непрерывна на всей числовой оси.

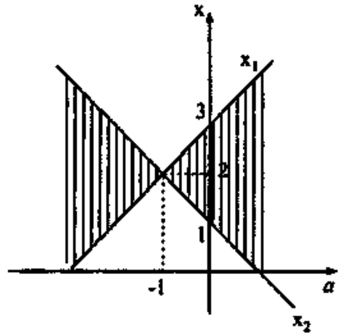
Ответ: $a = 6$.

2. Область определения данной функции задается условием $\sin 2x + \cos x \geq 0$. Используя формулу для синуса двойного угла, решим это неравенство методом интервалов. Имеем: $2\sin x \cos x + \cos x \geq 0$ или $\cos x\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right) \geq 0$. В промежутке $[0; 2\pi]$ найдем корни этого выражения $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}\right)$ и отметим их на единичной окружности. Например, при $x = 0$ определим знак данного выражения: $\cos 0\left(\sin 0 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} > 0$ и расставим знаки. На основании диаграммы запишем решение неравенства $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$.

3. Для решения неравенства $x^2 - 4x + 3 - 2a - a^2 \leq 0$ прежде всего найдем корни квадратного трехчлена и получим $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 + 2a + a^2} = 2 \pm \sqrt{(a+1)^2} = 2 \pm (a+1)$ или $x_1 = 3 + a$ и

$x_2 = 1 - a$. В системе координат aOx построим поведение этих корней. Определив, например, знак выражения $x^2 - 4x + 3 - 2a - a^2$ при $x = 0$, $a = 0$, заштрихуем множество точек $(a; x)$, для которых выполняется данное неравенство.



На основании такой диаграммы записываем *ответ*: при $a \in (-\infty; -1)$ $x \in [3 + a; 1 - a]$; при $a = -1$ $x = 2$; при $a \in (-1; \infty)$ $x \in [1 - a; 3 + a]$.

4. По определению угол, под которым пересекаются две кривые, совпадает с углом, под которым пересекаются касательные к этим кривым, проведенные в точке пересечения. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4x - 3$. Получаем уравнение $x^2 = 4x - 3$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$, корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (то есть точки пересечения имеют найденные абсциссы).

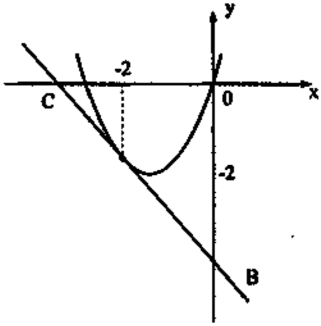
Угловой коэффициент прямой является величиной постоянной $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = 4$. Угловой коэффициент касательной к параболе равен $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = y'(x) = 2x$ (то есть для точки $x = 1$ $k_2 = 2$, для точки $x = 3$ $k_2 = 6$). Тогда прямая пересекает параболу под углом: в точке $x = 1$ $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}$, в точке $x = 3$ $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 =$

$= \operatorname{arctg} 6 - \operatorname{arctg} 4 = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{25}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{25}$.

5. Сначала напишем уравнение касательной к параболе $f(x) = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = -2$. Найдем производную $f'(x) = 2x + 3$. Вычислим значение производной и самой функции в точке x_0 и получим $f'(-2) = -1$ и $f(-2) = -2$. Тогда уравнение касательной

$y=-1(x+2)-2$ или $y=-x-4$. Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат: с осью ординат – $y=-4$, с осью абсцисс – $x=-4$. Тогда ΔBOC прямоугольный с катетами $OB=4$ и $OC=4$ и его площадь равна $S=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$.



Ответ: 8.

6. Найдем сначала скорость тела $V(t)=x'(t)=\left(20\cos\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)\right)'=$ $=-120\sin\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)$. В момент времени $t=\frac{\pi}{6}$ получаем $V\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ $=-120\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=120\sin\frac{\pi}{3}=120\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=60\sqrt{3}$. Теперь найдем ускорение тела $a(t)=V'(t)=\left(-120\sin\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)\right)'=-720\cos\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)$.

В момент времени $t=\frac{\pi}{6}$ имеем $a\left(\frac{\pi}{6}\right)=-720\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$ $=720\cos\frac{\pi}{3}=720\cdot\frac{1}{2}=360$.

Ответ: $V=60\sqrt{3}$, $a=360$.

§ 6. Применение производной к исследованию функций

Уроки 79–80. Признак возрастания (убывания) функций

Цель: рассмотреть монотонность функции и промежутки монотонности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение **промежутков монотонности** функции (то есть **промежутков ее возрастания и убывания**). Такой анализ легко выполнить с помощью производной. Сформулируем **достаточные признаки возрастания и убывания** функции:

1) Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция $f(x)$ **возрастает** на I.

2) Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция $f(x)$ **убывает** на I.

Возрастающая функция $f'(x) > 0$

Убывающая функция $f'(x) < 0$

Сформулированные утверждения легко доказать с помощью формулы Лагранжа. Возьмем два любых числа x_1 и x_2 из интервала I и пусть $x_2 > x_1$. По формуле Лагранжа существует число $c \in (x_1;\ x_2)$ такое, что $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$. Число c принадлежит интервалу I, так как точки x_1 и x_2 принадлежат I. Если $f'(x) > 0$ для $x \in I$, то $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому $f(x_2)-f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. Тогда по определению функция $f(x)$ возрастает на I. Если $f'(x) < 0$ для $x \in I$, то $f'(c) < 0$. Поэтому $f(x_2)-f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, так как $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, по определению функция $f(x)$ убывает на I.

Пример 1

Исследуем на монотонность функцию $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 4x$.

Найдем производную функции $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 + 4$. Видно, что при всех значениях x производная $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2

Докажем, что функция $f(x) = 3\cos 2x - 10x$ убывает на всей числовой оси.

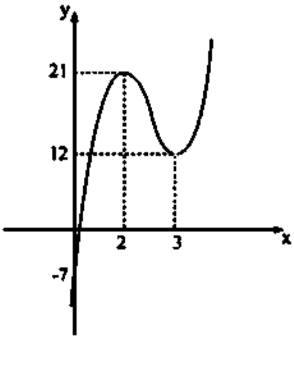
Производная данной функции $f'(x) = -6\sin 2x - 10$. Определим знак этого выражения. В силу ограниченности функции синус выполняется неравенство $-1 \le \sin 2x \le 1$, тогда $6 \ge -6\sin 2x \ge -6$ и $-4 \ge -6\sin 2x - 10 \ge -16$. Таким образом, при всех значениях x производная $f'(x) < 0$. Поэтому данная функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси.

Пример 3

Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 7$. Построим эскиз графика этой функции.

Найдем производную функции $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$. Построим диаграмму знаков производной. Приравняем производную нулю $6(x^2 - 5x + 6) = 0$ и найдем корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Отметим их на числовой прямой и определим знаки производной. Видно, что на промежутках $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$ производная $f'(x) > 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[3; \infty)$. На промежутке $(2; 3)$ производная $f'(x) < 0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на промежутке $[2; 3]$.

Найдем значения функции в точках $x = 2$ и $x = 3$, а также в точке $x = 0$: $f(0) = -7$, $f(2) = 21$, $f(3) = 12$. Построим эти точки и учтем монотонность функции. Получаем эскиз графика данной функции.



Пример 4

При каких значениях параметра a функция $f(x)=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-2$ убывает на числовой оси?

Найдем производную функции $f'(x)=3(a+2)x^2-6ax+9a=$ $=3((a+2)x^2-2ax+3a)$. Функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси, если ее производная $f'(x)\le 0$ при всех значениях x. Получаем неравенство $(a+2)x^2-2ax+3a\le 0$. Так как старший коэффициент $a+2$ в неравенстве зависит от параметра a, то надо рассмотреть два случая.

а) Если $a+2=0$ (то есть $a=-2$), то неравенство становится линейным $4x-6\le 0$. Очевидно, что такое неравенство при всех значениях x не выполняется.

б) Если $a+2\ne 0$ (то есть $a\ne -2$), то неравенство является квадратным. Оно выполняется при всех значениях x, если старший коэффициент $a+2<0$ и дискриминант $D=(-2a)^2-4(a+2)\cdot 3a=4(a^2-3a^2-6a)=$ $=-8(a^2+3a)\le 0$. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} a+2<0 \\ -8(a^2+3a)\le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a+2<0 \\ a^2+3a\ge 0 \end{cases}$. Решая эти неравенства, имеем $\begin{cases} a\in(-\infty;-2) \\ a\in(-\infty;-3]\cup[0;\infty) \end{cases}$, откуда $a\in(-\infty;-3]$. Итак, при $a\in(-\infty;-3]$ данная функция убывает на всей числовой оси.

Разумеется, понятие **монотонности** функции оказывается полезным и **при исследовании корней уравнения.**

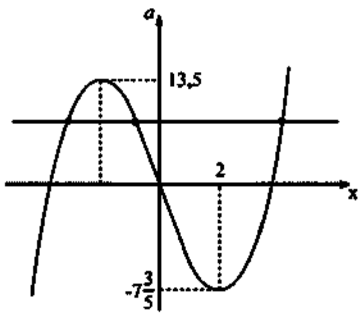
Пример 5

При каких значениях параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x=a$ имеет три корня?

Построим эскиз графика зависимости $a(x)$. Найдем производную функции $a'(x)=x^2+x-6$. Приравняем производную нулю и получим квадратное уравнение $0=x^2+x-6$, корни которого $x_1=-3$ и $x_2=2$. Отложим эти точки на числовой прямой и проставим знаки производной $a'(x)$.

Видно, что функция $a(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;-3]$ и $[2;\infty)$ и убывает на промежутке $[-3;2]$. Найдем значения $f(-3)=13{,}5$, $f(0)=0$, $f(2)=-7\frac{2}{3}$. Построим эти точки и учтем монотонность

функции. Получаем эскиз графика функции $a(x)$. Очевидно, что при $a \in \left(-7\frac{2}{3}; 13{,}5\right)$ данное уравнение имеет ровно три различных корня.



III. Задание на уроке

№ 279 (а, г); 280 (б, в); 281 (а); 282 (б); 283 (а); 284 (б); 285 (а, б); 286 (а, б).

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите признак возрастания функции.
2. Сформулируйте и докажите признак убывания функции.

V. Задание на дом

№ 279 (б, в); 280 (а, г); 281 (в); 282 (в); 283 (в); 284 (г); 285 (в, г); 286 (в, г).

VI. Творческие задания

1. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{6-a} - 3\right)x^3 - 3x + \sqrt{49-a^2}$ убывает.

Ответ: $a \in [-4; 5) \cup (6; 7]$.

2. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x) = (a-12)x^3 + 3(a-12)x^2 + 6x - 7$ возрастает при всех x.

Ответ: $a \in [12; 14]$.

3. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a}\right)x^5 - 3x + 10$ убывает при всех x.

Ответ: $a \in \left[-4; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right] \cup (1; \infty)$.

4. При каком натуральном значении параметра a уравнение $x^3+3x^2-9x-a=0$ имеет ровно два корня?

Ответ: $a=27$.

5. При каком наименьшем натуральном значении параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x=a$ имеет ровно один корень?

Ответ: $a=35$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4\sin x+9=a(a+\operatorname{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $a\in(0;13]$.

7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4\cos^3 x+a=7\cos 2x$ не имеет решений.

Ответ: $a\in(-\infty;7)\cup(11;\infty)$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 81–83. Критические точки функции, максимумы и минимумы

Цель: рассмотреть понятие критической точки функции, признаки максимума и минимума функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформируйте и докажите признак возрастания функции.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x$. Постройте эскиз графика функции.

3. Укажите количество промежутков убывания на отрезке $[0;2\pi]$ функции $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x$. Постройте график функции.

Вариант 2

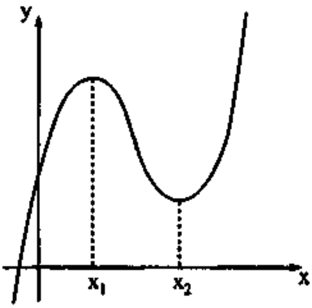
1. Сформируйте и докажите признак убывания функции.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$. Постройте эскиз графика функции.

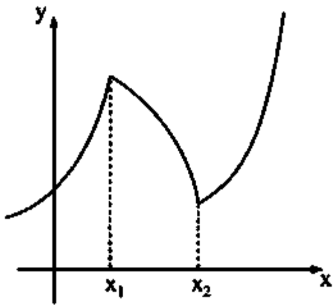
3. Укажите количество промежутков убывания на отрезке $[0; 2\pi]$ функции $f(x) = 2\sin^2 x - \cos 2x$. Постройте график функции.

III. Изучение нового материала

На предыдущем уроке при нахождении промежутков монотонности производную функции приравнивали нулю и находили соответствующие значения аргумента. В связи с этим введем важнейшее понятие **критических точек** функции. **Внутренние точки** области определения функции $f(x)$, в которых ее **производная** $f'(x)$ **равна нулю или не существует**, называются **критическими точками** этой функции. Такие точки играют важную роль при исследовании функции, так как только они могут быть **точками экстремума** (то есть минимума или максимума) функции.



$f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0$



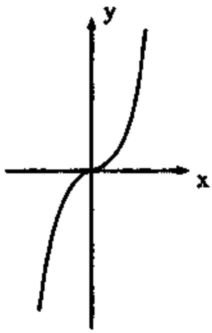
$f'(x_1), f'(x_2)$ не существуют

Сформулируем **необходимое условие экстремума**. Если точка x_0 является **точкой экстремума** функции $f(x)$ и в этой точке существует **производная** $f'(x_0)$, то она **равна нулю** $f'(x_0) = 0$. Это утверждение называют **теоремой Ферма**. Докажем такое утверждение способом от противного.

Рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$. По определению производной отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$ и поэтому само будет положительным. Следовательно, при $x > x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$, при $x < x_0$ получаем $f(x) < f(x_0)$. Поэтому точка x_0 не является ни точкой максимума, ни точкой минимума. Аналогично рассматривается случай $f'(x_0) < 0$. Следовательно, при $f'(x_0) > 0$ или

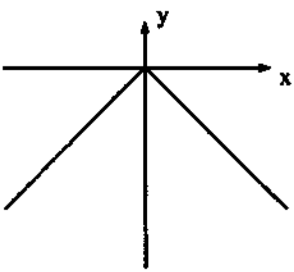
$f'(x_0) < 0$ точка x_0 не может быть точкой экстремума. Поэтому если x_0 – точка экстремума, то производная $f'(x) = 0$.

Заметим, что теорема Ферма является только **необходимым (но не достаточным)** условием экстремума: из того, что производная $f'(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, не обязательно следует, что в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум. Например, функция $f(x) = x^5$ имеет производную $f'(x) = 5x^4$, которая обращается в 0 в точке $x_0 = 0$. Однако **экстремума** в этой точке функция $f(x)$ **не имеет** (происходит изменение кривизны кривой).

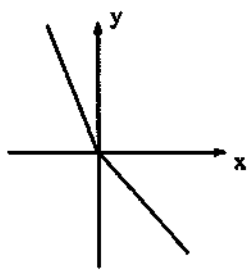


Теперь рассмотрим критические точки, в которых производная не существует. Для функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ производная $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, которая не существует в точке $x_0 = 0$. Но эта точка не является критической, так как не внутренняя точка области определения.

Для функций $f(x) = -|x|$ и $f(x) = |x| - 2x$ точка $x_0 = 0$ является внутренней точкой области определения и в точке x_0 производная этих функций не существует. Однако функция $f(x) = -|x|$ в точке x_0 имеет максимум, функция $f(x) = |x| - 2x$ в точке x_0 экстремума не имеет.



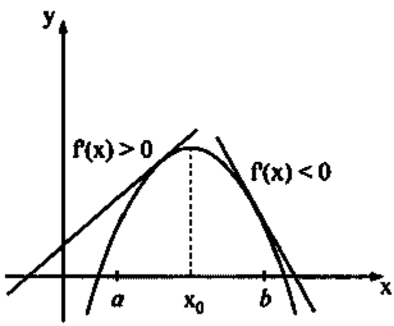
$f(x) = -|x|$



$f(x) = |x| - 2x$

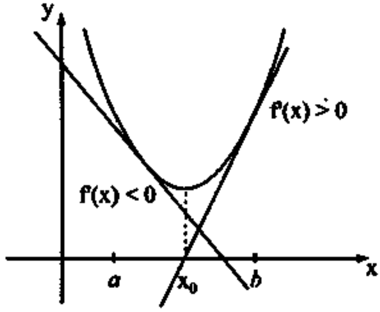
Итак, при нахождении точек экстремумов функции требуется в первую очередь найти ее критические точки. Вопрос о том, является ли данная критическая точка точкой экстремума, требует дополнительного исследования (как следует из приведенных примеров). При таком исследовании полезны **достаточные условия** существования **экстремума** функции в точке.

Признак максимума функции. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$. Обычно пользуются упрощенной формулировкой этого признака. Если в точке x_0 **производная** функции $f'(x)$ **меняет знак с плюса на минус**, то точка x_0 – **точка максимума**. Докажем это утверждение.



Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как производная $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(a; x_0]$ и потому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a; x_0)$. На промежутке $[x_0; b)$ аналогично функция $f(x)$ убывает и поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0; b)$. Итак, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из промежутка $(a; b)$, то есть по определению точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

Аналогично можно сформулировать **признак минимума функции.** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$. Упрощенная формулировка этого признака: если в точке x_0 **производная** $f'(x)$ **меняет знак с минуса на плюс**, то точка x_0 – **точка минимума**.



Доказательство этого признака аналогично доказательству признака максимума.

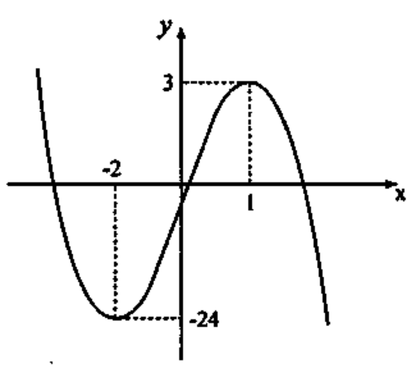
Рассмотрим применение необходимых и достаточных условий для нахождения экстремумов функции.

Пример 1

Найдем экстремумы функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$.

Найдем производную функции $f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2)$. Приравняем производную нулю $6(x^2 + x - 2) = 0$, решим это квадратное уравнение и найдем критические точки функции $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Отметим критические точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$.

Видно, что в точке $x = -2$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому критическая точка $x = -2$ – точка минимума. Найдем минимум функции $f_{min} = f(-2) = -2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - 4 = -24$. В точке $x = 1$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка $x = 1$ – точка максимума. Найдем максимум функции $f_{max} = f(1) = -2\cdot1^3 - 3\cdot1^2 + 12\cdot1 - 4 = 3$.



Построим экстремумы функции и нарисуем эскиз графика данной функции (рисунок приведен с искажением масштаба).

Пример 2

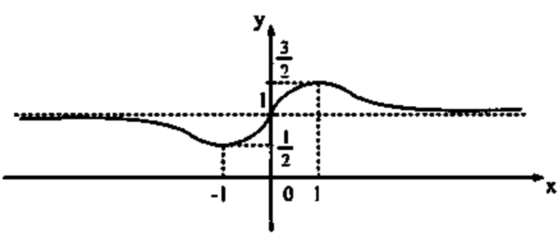
Найдем множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Вычислим экстремумы этой функции. Найдем производную функции

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + x + 1)'(x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$= \dfrac{(2x + 1)(x^2 + 1) - (x^2 + x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $1 - x^2 = 0$ и найдем критические точки функции $x = \pm 1$.

Отметим критические точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что в точке $x = -1$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому $x = -1$ – точка минимума и $f_{\min}(x) = f(-1) = \dfrac{1}{2}$. В точке $x = 1$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому эта точка – точка максимума и $f_{\max}(x) = f(1) = \dfrac{3}{2}$. Отметим эти точки, а также точку пересечения с осью ординат. Запишем функцию в виде $f(x) = 1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Видно, что при $x \to \infty$ функция $f(x) \to 1$. Поэтому $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика данной функции.



Построим график этой функции. Получим, что значения функции $\dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{3}{2}$. Поэтому множество значений функции $E(f) = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

IV. Задание на уроке

№ 287 (а); 288 (а, б); 289 (б); 290 (в, г); 291 (б, г); 292 (а, б); 293 (а, б); 294 (в, г); 295 (а, г).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение критических точек функции.

2. Сформулируйте и докажите необходимое условие экстремума (теорему Ферма).

3. Сформулируйте и докажите признак максимума (минимума) функции.

4. Приведите упрощенную формулировку признака максимума (минимума) функции.

VI. Задание на дом

№ 287 (б); 288 (в, г); 289 (а); 290 (а, б); 291 (а, в); 292 (в, г); 293 (в, г); 294 (а, б); 295 (б, в).

VII. Творческие задания

1. Найти значения параметра a, при которых функция $f(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5x$ убывает и не имеет критических точек на всей числовой прямой.

Ответ: $a<\dfrac{1}{15}$.

2. Найти критические точки функции $f(x)=2\sin^2\dfrac{x}{6}+\sin\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{3}$, удовлетворяющие неравенству $x^2-10<-19{,}5x$.

Ответ: $-6\pi;\ -\dfrac{9}{2}\pi;\ 0$.

3. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=\left(a^2-6a+8\right)\dfrac{\sin(\pi+x)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}+\left(a^2-7a+12\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)$ не имеет критических точек.

Ответ: $a\in[2;4)\cup(4;\infty)$.

4. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x+\frac{2\pi}{15}\right).$$

Ответ: $f_{\max}(x)=\dfrac{3}{4}$.

5. При каких значениях параметра $a > 0$ точка $x = 3$ является точкой максимума $f(x) = 2x^3 - 6a^2x + 3$?

Ответ: $a = 3$.

6. При каком значении параметра a наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4ax - a^4$ будет наибольшим?

Ответ: $a = 0$.

7. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; б) $f(x) = \sin x \cos 2x$; в) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}$.

Ответ: а) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$; б) $[-1; 1]$; в) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Найти критические точки функции:

8. $f(x) = \dfrac{1}{5}(5x+7)^{3/2} - \dfrac{1}{2}(3x+1)^{3/2} - (x+3)^{3/2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{11}$.

9. $f(x) = \dfrac{1}{5}(5x+7)^{3/2} - (5x-12)^{3/2} - \dfrac{15}{2}x$.

Ответ: -3; 4.

10. $f(x) = \cos x - 3\sin 2x + 5x + \sqrt{3}$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n$; $(-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi k$, где $n, k \in Z$.

11. $f(x) = \sin x - \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{5}\cos 5x$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{3}$; $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{2}$, где $n, k \in Z$.

12. $f(x) = \sin 6x - 3\cos 2x + 3$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{3}n$; $\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{\pi}{4}k$, где $n, k \in Z$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 84–86. Примеры применения производной к исследованию функций

Цель: рассмотреть применение производной для исследования функций и уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Дайте полную и упрощенную формулировку признака максимума функции.

2. Определите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функции $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

3. Найдите критические точки функции $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$.

Вариант 2

1. Дайте полную и упрощенную формулировку признака минимума функции.

2. Определите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функции $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$.

3. Найдите критические точки функции $f(x) = 42\cos 5x + 30\cos 7x - 35\cos 6x$.

III. Изучение нового материала

При исследовании функции и построении ее графика надо:

1) найти **область определения**;

2) выяснить **особенности** (четность или нечетность функции, периодичность и т. д.);

3) **точки пересечения** графика **с осями координат**;

4) найти **промежутки знакопостоянства**;

5) выяснить с помощью производной **монотонность** функции, **промежутки возрастания и убывания**;

6) используя производную, найти **точки экстремума и значения функции в этих точках**;

7) определить вертикальные, горизонтальные или наклонные **асимптоты**, исследовав поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x.

Рассмотрим применение этого плана для исследования функции и построения графика функции.

Пример 1

Исследуем функцию $f(x) = x^2(x-2)^2$ и построим ее график.

1) Область определения $D(f) = R$, так как $f(x)$ – многочлен.

2) Функция определенной четности не имеет.

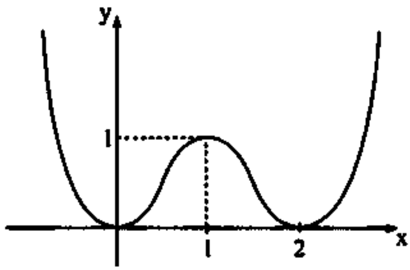
3) График касается оси абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 2$.

4) При всех значениях x функция $f(x) \geq 0$.

5, 6) Найдем производную функции $f'(x) = 2x(x-2)^2 + x^2 \cdot 2(x-2) =$ $= 2x(x-2)(x-2+x) = 4x(x-2)(x-1)$. Производная существует при всех значениях x и обращается в нуль при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$ (критические точки). Отметим эти точки на числовой оси и нарисуем диаграмму знаков производной.

Видно, что промежутки убывания функции $(-\infty; 0]$ и $[1; 2]$ и промежутки возрастания $[0; 1]$ и $[2; \infty)$. В точках $x = 0$ и $x = 2$ функция имеет минимум и $f_{\min} = f(0) = f(2) = 0$. В точке $x = 1$ функция имеет максимум и $f_{\max} = f(1) = 1$.

7) Асимптот график функции не имеет. Учитывая проведенное исследование функции, нарисуем эскиз ее графика.



Пример 2

Проведем исследование и построим график функции $f(x) = \dfrac{1+x-2x^2}{x+1}$.

1) Область определения функции $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2) Так как область определения – не симметричное множество, то функция определенной четности не имеет.

3) График пересекает ось ординат в точке $f(0) = 1$. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс решим уравнение $f(x) = 0$ или $\dfrac{1+x-2x^2}{x+1}$, корни которого $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

4) Отметим точки $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$ и $x = -1$ (в которой дробь не имеет смысла) на координатной оси и отметим знаки функции $f(x)$. Видно, что значения $f(x) > 0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};1\right)$. и значения $f(x) < 0$ при $x\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$ – промежутки знакопостоянства функции.

5), 6) Найдем производную функции

$$f'(x)=\frac{(1+x-2x^2)'(x+1)-(1+x-2x^2)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

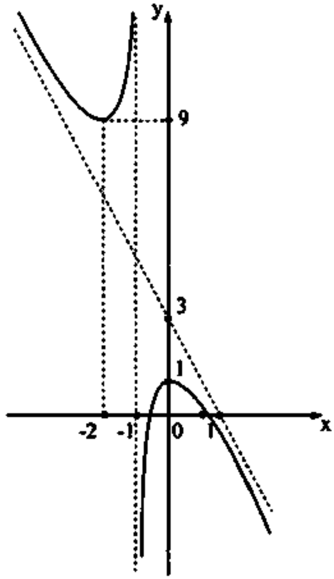
$$=\frac{(1-4x)(x+1)-(1+x-2x^2)\cdot 1}{(x+1)^2}=-\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}.$$ Производная не существует в точке $x = -1$, но эта точка не входит в область определения функции и не является критической.

Производная обращается в нуль в точках $x = -2$ и $x = 0$ (критические точки). Отметим эти точки на числовой оси и расставим знаки производной. Видно, что функция $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; \infty)$ и возрастает на промежутках $[-2; -1)$ и $(-1; 0]$. В точке $x = -2$ функция имеет минимум и $f_{min} = f(-2) = 9$, в точке $x = 0$ – имеет максимум и $f_{max} = f(0) = 1$.

7) Функция имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как при $x\to-1$ числитель дроби $1+x-2x^2\to-2$, а знаменатель $x + 1\to0$. Поэтому $f(x)\to\pm\infty$ при $x\to-1$.

В функции $f(x)$ выделим целую часть (деля уголком) и получим $f(x)=-2x+3-\frac{2}{x+1}$. При $x\to\pm\infty$ величина $\frac{2}{x+1}\to0$ и $f(x)\to-2x+3$. Поэтому функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=-2x+3$.

Учитывая проведенное исследование, строим график данной функции.

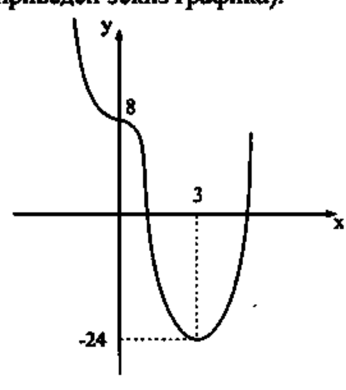


Пример 3

Определим число корней уравнения $x^4 - 4x^3 + 8 = 0$.

Рассмотрим и исследуем функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$. Найдем производную этой функции $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции $x = 0$ и $x = 3$. Нарисуем диаграмму знаков производной.

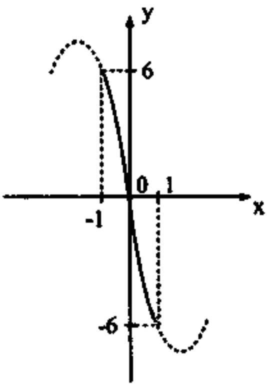
Видно, что на промежутке $[3; \infty)$ функция возрастает. В точке $x = 3$ функция имеет минимум $f_{min}(x) = f(3) = -19$. Тогда по теореме о корне уравнение имеет один корень на промежутке $(\infty; 3)$ и один корень на промежутке $(3; \infty)$. Таким образом, данное уравнение имеет два корня (на рисунке приведен эскиз графика).



Пример 4

Найдем все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2x + \frac{a}{\sin x} = -7$ имеет решения.

Используем формулу понижения степени и запишем уравнение в виде: $1 - 2\sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7$ и выразим $a = 2\sin^3 x - 8\sin x$. Введем новую переменную t (где $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$) и построим график функции $a'(t) = 6t^2 - 8$. Приравняем производную нулю и получим критические точки $t = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Отметим эти точки на числовой оси и расставим знаки производной. Критические точки функции не принадлежат промежуткам $[-1; 0) \cup (0; 1]$. Поэтому на этих промежутках функция убывает. Учтем, что функция $a(t)$ нечетная. Найдем значения $a(-1) = 6$ и $a(1) = -6$. На рассматриваемых промежутках построим график функции.



Из графика видно, что при $a \in [-6; 0) \cup (0; 6]$ данное уравнение имеет решения.

IV. Задание на уроке

№ 296 (б); 297 (а, б); 298 (б); 299 (а, б); 300 (а); 301 (в, г); 302 (а, б); 303 (в, г); 304 (а, в).

V. Задание на дом

№ 296 (г); 297 (в); 298 (в); 399 (в, г); 300 (б); 301 (а, б); 302 (в, г); 303 (а, б); 304 (б, г).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 87–88. Наибольшее и наименьшее значения функции

Цель: рассмотреть наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ и постройте ее график.

2. Сколько корней имеет уравнение $2x^4-4x^3-3=0$?

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x)=\cos^2 x+\cos x$ и постройте ее график.

2. Сколько корней имеет уравнение $3x^4-4x^3-5=0$?

III. Изучение нового материала

При решении практических задач часто приходится находить **наибольшее и наименьшее значения функции** непрерывной на отрезке. В курсе математического анализа доказывается **теорема Вейерштрасса:** непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, то есть на отрезке $[a; b]$ существуют точки, в которых функция $f(x)$ принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ **не имеет критических точек**, то она или возрастает, или убывает на этом отрезке. Поэтому **наибольшее и наименьшее значения** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ **достигаются в концах** a и b отрезка.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ **конечное число критических точек**. Эти точки разбивают отрезок $[a; b]$ на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Поэтому **наибольшее и наименьшее значения** функции $f(x)$ на таких отрезках **достигаются** в их концах, то есть **в критических точках функции или в точках a и b.**

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, надо **вычислить значения функции во всех критических точках и на концах от-**

резка, а затем из полученных чисел **выбрать наибольшее и наименьшее.**

Пример 1

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$ на отрезке [−2; 4].

Вычислим производную данной функции $f'(x)=36x+24x^2-12x^3=12x\left(3+2x-x^2\right)$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $x\left(3+2x-x^2\right)=0$ и найдем критические точки функции $x_1=0$, $x_2=-1$ и $x_3=3$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что в точках $x=-1$ и $x=3$ функция имеет максимум, в точке $x=0$ функция имеет минимум. На промежутке [−2; 4] находятся все три точки экстремума.

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка. Эти величины приведены в таблице.

x	−2	−1	0	3	4
$f(x)$	−40	7	0	135	32

Из сравнения значений функции видно, что $\max\limits_{[-2;4]} f(x)=f(3)=135$ и $\min\limits_{[-2;4]} f(x)=f(-2)=-40$. В данном случае наибольшее значение функции достигается в точке максимума $x=3$, наименьшее значение – на левой границе $x=-2$ рассматриваемого промежутка.

Пример 2

Найдем множество значений функции $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

Вычислим производную данной функции $f'(x)=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2+$ $+\cos x=-\sin 2x+\cos x=\cos x(-2\sin x+1)$. Приравняем производную нулю. Получаем уравнение $\cos x(-2\sin x+1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнение $\cos x=0$ и $\sin x=\frac{1}{2}$. Их решения на данном отрезке: $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$. Определим знак производной $f'(x)$, например при $x=0$.

Получаем: $f'(0)=\cos 0\cdot(-2\sin 0+1)=1>0$. Теперь легко построить диаграмму знаков производной. Видно, что в точках $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$ функция $f(x)$ имеет максимум, в точке $x=\frac{\pi}{2}$ – минимум. Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка. Эти величины приведены в таблице.

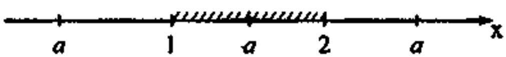
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Из сравнения значений функции видно, что множество значений функции на данном промежутке $\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{3}{4}$. Видно, что наименьшее значение функция достигает в точке минимума и на концах данного отрезка, наибольшее значение – в точках максимума, то есть $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)=\frac{1}{2}$ и $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$.

Пример 3

Найдем наибольшее значение функции $f(x)=3+2ax-x^2$ на отрезке [1; 2].

Вычислим производную функции $f'(x)=2a-2x$. Критическая точка функции $x=a$. Рассмотрим различное расположение точки a по отношению к данному промежутку [1; 2]. Имеем три случая.



а) Если $a\in(-\infty;1)$, то производная $f'(x)<0$ на отрезке [1; 2]. Поэтому функция $f(x)$ убывает и достигает наибольшего значения на левой границе промежутка $x=1$. Наибольшее значение функции $\max\limits_{[1;\,2]} f(x)=f(1)=2+2a$.

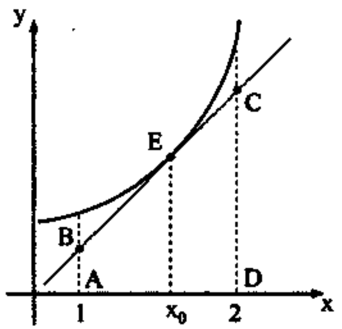
б) Если $a\in[1;2]$, то критическая точка находится на данном отрезке и это точка максимума. Тогда наибольшее значение $\max\limits_{[1;\,2]} f(x)=f(a)=3+a^2$.

в) Если $a \in (2; \infty)$, то производная $f'(x) > 0$ на отрезке [1; 2]. Поэтому функция возрастает и достигает наибольшего значения на правой границе промежутка $x = 2$. При этом наибольшее значение функции $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = 4a - 1$.

Итак, при $a \in (-\infty; 1)$ $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2 + 2a$; при $a \in [1; 2]$ $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 3 + a^2$; при $a \in (2; \infty)$ $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 4a - 1$.

Пример 4

Криволинейная трапеция ограничена кривой $f(x) = x^2 + 1$, где $x \in [1; 2]$ и отрезками прямых $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. В какой точке данной кривой надо провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?



Предположим, что касательная к графику функции $f(x)$ проведена в точке с абсциссой x_0. Уравнение этой касательной $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + 1$ или $y = 2x_0x + 1 - x_0^2$. Найдем площадь трапеции $ABCD$. Основание $AB = y(1) = 2x_0 + 1 - x_0^2$, основание $CD = y(2) = 4x_0 + 1 - x_0^2$, высота AD = 1. Площадь трапеции $S = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot AD = -x_0^2 + 3x_0 + 1$.

Найдем производную этой функции $S'(x_0) = -2x_0 + 3$. Критическая точка функции $x_0 = \dfrac{3}{2}$ принадлежит промежутку [1; 2]. В этой точке функция достигает максимума $S\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3\dfrac{1}{4}$. Найдем также значения функции $S(x_0)$ на концах промежутка $S(1) = 3$ и $S(2) = 3$. Видно, что $\max\limits_{[1;2]} S(x_0) = 3\frac{1}{4}$. Таким образом, касательную надо проводить через точку $E\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

IV. Задание на уроке

№ 305 (а, б); 306 (б); 308; 310 (а, б); 311; 313; 317; 320; 322.

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
2. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?

VI. Задание на дом

№ 305 (в, г); 306 (а); 307; 310 (в, г); 312; 316; 318; 321; 323.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 89–90. Контрольная работа по теме «Применение производной к исследованию функции»

Цель: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найти критические точки функции $f(x)=3\sin x+2\cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+1$.

3. Докажите, что функция $f(x)=4x-3\sin x$ возрастает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ на отрезке $[-2; 4]$.

5. Исследуйте функцию $f(x)=x^4+4x^2-5$ и постройте ее график.

6. Число 180 разбейте на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

Вариант 2

1. Найти критические точки функции $f(x)=2\sin x-3\cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+2$.

3. Докажите, что функция $f(x)=5\cos x-7x$ убывает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$ на отрезке $[-2; 6]$.

5. Исследуйте функцию $f(x)=x^4+8x^2-9$ и постройте ее график.

6. Число 300 разбейте на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 2:3, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

Вариант 3

1. Найти критические точки функции $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+2x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

3. Докажите, что уравнение $x^5+2x^3+8x+\cos 3x=0$ имеет ровно один корень.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-2)^2(x+4)$ на отрезке [−5; 1].

5. Найти наименьшее значение суммы трех сторон прямоугольника, если его площадь равна S.

6. При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+ax+7$ возрастает на всей числовой прямой?

Вариант 4

1. Найти критические точки функции $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

3. Докажите, что уравнение $x^5+4x^3+7x+\sin 2x=0$ имеет ровно один корень.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-4)^2(x+2)$ на отрезке [−1; 5].

5. Найти наименьшее значение суммы трех сторон параллелограмма с острым углом α и площадью S.

6. При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-ax^2-3ax+2$ убывает на всей числовой прямой?

Вариант 5

1. Докажите, что для функции $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$ выполняется неравенство $\max\limits_{[-\pi;\pi]} f(x)<\frac{4}{5}$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

а) Постройте график функции $f(x)$.

б) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$?

3. Решите уравнение $x^3-3x^2+9x-2=\sqrt{27-2x}$.

4. Число 20 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

5. В какой точке графика функции $f(x)=x^2+2x-3$ надо провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей.

Вариант 6

1. Докажите, что для функции $f(x)=(\cos x)^2\sin x$ выполняется неравенство $\min\limits_{[-\pi;\pi]} f(x)>-\frac{7}{18}$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{x^3+4}{(x+1)^3}$.

а) Постройте график функции $f(x)$.

б) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$?

3. Решите уравнение $x^3-2x^2+8x-3=\sqrt{19-3x}$.

4. Число 48 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

5. В какой точке графика функции $f(x)=x^2-2x-3$ надо провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей.

Урок 91. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы, рассмотреть наиболее типичные ошибки, разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результатам решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $x = \operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$ (где $n \in Z$).

2. *Ответ*: промежутки возрастания $(-\infty; -5]$ и $[1; \infty)$, промежуток убывания $[-5; 2]$, $x_{max} = -5$ и $f_{max}(x) = f(-5) = 34\frac{1}{3}$; $x_{min} = 1$ и $f_{min}(x) = f(1) = -1\frac{2}{3}$.

3. *Ответ*: доказано.

4. *Ответ*: $\max\limits_{[-2;\,4]} f(x) = f(-1) = 15$, $\min\limits_{[-2;\,4]} f(x) = f(3) = -17$.

5. *Ответ*: $\min f(x) = f(0) = -5$, точки пересечения с осью абсцисс $x = \pm 1$.

6. *Ответ*: 40, 80, 60.

Вариант 2

1. *Ответ*: $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$ (где $n \in Z$).

2. *Ответ*: промежутки возрастания $(-\infty; -4]$ и $[1; \infty)$, промежуток убывания $[-4; 1]$, $x_{max} = -4$ и $f_{max}(x) = f(-4) = 20\frac{2}{3}$; $x_{min} = 1$ и $f_{min}(x) = f(1) = -\frac{1}{6}$.

3. *Ответ*: доказано.

4. *Ответ*: $\max\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(1) = 8$, $\min\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(-2) = -73$.

5. *Ответ*: $\min f(x) = f(0) = -9$, точки пересечения с осью абсцисс $x = \pm 1$.

6. *Ответ*: 80, 120, 100.

Вариант 3

1. *Ответ*: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ (где $n \in Z$).

2. *Ответ*: промежуток возрастания $[2; \infty)$, промежутки убывания $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; 2]$, $x_{\min} = 2$ и $f_{\min}(x) = f(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. *Ответ*: учесть возрастание функции.

4. *Ответ*: $\max\limits_{[-5;1]} f(x) = f(-2) = 32$ и $\min\limits_{[-5;1]} f(x) = f(-5) = -49$.

5. *Ответ*: $\sqrt{2S}$.

6. *Ответ*: $a = 2$.,

Вариант 4

1. *Ответ*: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ (где $n \in Z$).

2. *Ответ*: промежуток возрастания $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, экстремумов нет.

3. *Ответ*: учесть возрастание функции.

4. *Ответ*: $\max\limits_{[-1;5]} f(x) = f(0) = 32$ и $\min\limits_{[-1;5]} f(x) = f(4) = 0$.

5. *Ответ*: $2\sqrt{2S\sin\alpha}$.

6. *Ответ*: $a = 6$.

Решения

Вариант 5

1. Найдем наибольшее значение данной функции. Сначала вычислим производную функции $f'(x) = \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot 2\cos 2x =$ $= \sin x\left(2\cos^2 x + 2\cos 2x\right) = \sin x(1 + 3\cos 2x)$. Критические точки функции на заданном промежутке задаются условиями $\sin x = 0$ и $\cos 2x = -\frac{1}{3}$. Для первого случая ($\sin x = 0$ или x = 0; $\pm\pi$) имеем $f(x) = 0$. Для второго случая ($\cos 2x = -\frac{1}{3}$) получаем $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x =$

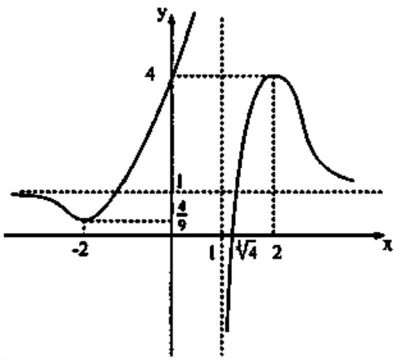
$$= 2\sin^2 x\cos x = (1 - \cos 2x)\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3} = 0,76.$$

Так как $0,76 < \frac{4}{5}$, то $\max\limits_{[-\pi;\pi]} f(x) < \frac{4}{5}$.

Ответ: доказано.

2а) Функция пересекает ось абсцисс в точке $x = \sqrt[3]{4}$ и ось ординат – в точке $y = 4$. Имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. Найдем производную функцию

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)^3-(x^3-4)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=3\dfrac{4-x^2}{(x-1)^4}$. Критические точки функции $x=\pm 2$. При этом $x_{min}=-2$ и $y_{min}=f(-2)=\dfrac{4}{9}$; $x_{max}=2$ и $y_{max}=f(2)=4$. Исследовав промежутки возрастания и убывания функции, легко построить эскиз графика функции.



Ответ: см. график.

2б) После построения графика функции $f(x)$ легко ответить на вопрос о количестве корней уравнения $f(x)=a$. Имеем: при $a\in\left(-\infty;\dfrac{4}{9}\right)\cup(4;\infty)$ – 1 корень; при $a\in\left\{\dfrac{4}{9};1;4\right\}$ – 2 корня; при $a\in\left(\dfrac{4}{9};1\right)\cup(1;4)$ – 3 корня.

Ответ: при $a\in\left(-\infty;\dfrac{4}{9}\right)\cup(4;\infty)$ – 1 корень; при $a\in\left\{\dfrac{4}{9};1;4\right\}$ – 2 корня; при $a\in\left(\dfrac{4}{9};1\right)\cup(1;4)$ – 3 корня.

3. ОДЗ данного уравнения $x\le\dfrac{27}{2}$. Производная левой части уравнения $f_1'(x)=3x^2-6x+9$ при всех x положительна. Производная правой части уравнения $f_2'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{27-2x}}$ отрицательна при $x\in(-\infty;13{,}5)$. Тогда по теореме о корне данное уравнение имеет единственный корень, который находится подбором. Получаем $x=1$.

Ответ: $x=1$.

4. Пусть одно из чисел равно x, тогда второе равно $20 - x$. Найдем сумму куба первого числа и квадрата второго числа и получим функцию $f(x)=x^3+(20-x)^2$. Найдем ее производную $f'(x)=3x^2-2(20-x)=3x^2+2x-40$. Критические точки функции $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+120}}{3}=\dfrac{-1\pm 11}{3}$ или $x_1=-4$ и $x_2=\dfrac{10}{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и нарисуем диаграмму знаков производной. Видно, что функция имеет минимум при $x=\dfrac{10}{3}$. Тогда второе число $20-x=\dfrac{50}{3}$. Эти два числа положительные, что соответствует условию задачи.

Заметим, что если числа поменять местами, то по аналогии будем иметь функцию $f(x)=(20-x)^3+x^2$. Производная этой функции $f'(x)=-3(20-x)^2+2x=-(3x^2-122x+1200)$. Видно, что функция $f(x)$ убывает при всех x и наименьшего значения не имеет.

Ответ: $\dfrac{10}{3}$ и $\dfrac{50}{3}$.

5. Предположим, что касательная проведена в точке с абсциссой x_0. Напишем уравнение этой касательной. Найдем производную функции $f'(x)=2x+2$. Тогда уравнение касательной $y=(2x_0+2)(x-x_0)+x_0^2+2x_0-3$ или $x=(2x_0+2)x-x_0^2-3$. Найдем точки пересечения этой касательной с осями координат, то есть катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC.

При $x = 0$ находим $y = -x_0^2 - 3$ и длина катета $AB = -y = x_0^2 + 3$. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = 2(x_0+1)x - x_0^2 - 3$, откуда $x = \frac{x_0^2+3}{2(x_0+1)}$. Сначала рассмотрим случай $x_0 > -1$, тогда длина катета $AC = x = \frac{x_0^2+3}{2(x_0+1)}$. Поэтому площадь заданного треугольника $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{(x_0^2+3)^2}{4(x_0+1)}$. Определим значение x_0, при котором эта площадь наименьшая.

По переменной x_0 найдем производную $S' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2(x_0^2+3)\cdot 2x_0(x_0+1) - (x_0^2+3)^2 \cdot 1}{(x_0+1)^2} = \frac{(x_0^2+3)(4x_0^2+4x_0-x_0^2-3)}{4(x_0+1)^2} = \frac{(x_0^2+3)(3x_0^2+4x_0-3)}{4(x_0+1)^2}$. Критические точки функции задаются уравнением $3x_0^2+4x_0-3=0$, корни которого $x_0 = \frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$. С учетом ограничения $x_0 > -1$ подходит только корень $x_0 = \frac{\sqrt{13}-2}{3} \approx 0,5$. Диаграмма знаков производной показывает, что в этой точке, действительно, функция $S(x_0)$ имеет минимум (равный примерно 1,5).

Случай $x_0 < -1$ рассматривается аналогично. Тогда касательная проводится к левой ветви параболы. Площадь треугольника $S = -\frac{(x_0^2+3)^2}{4(x_0+1)}$. В этом случае критическая точка $x_0 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \approx -1,8$ и в ней также достигается минимум функции $S(x_0)$. Оценки показывают, что значение этого минимума примерно равно 9.

Сравнивая значения S в двух случаях, получаем, что касательную надо проводить в точке $x_0 = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$.

Ответ: $x_0 = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$.

Вариант 6

1. Найдем наименьшее значение данной функции. Сначала вычислим производную функции $f'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)\sin x+$ $+(\cos x)^2\cdot\cos x=\cos x\left(-2\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\dfrac{\cos x(3\cos 2x-1)}{2}$. Критические точки функции на заданном промежутке задаются условиями $\cos x=0$ и $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$. Для первого случая ($\cos x=0$ или $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$) имеем $f(x)=0$. Для второго случая ($\cos 2x=\dfrac{1}{3}$) получаем

$$f(x)=(\cos x)^2\sin x=-\frac{1+\cos 2x}{2}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=-\frac{1+\frac{1}{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\approx-0{,}38.$$ Так как $-0{,}38>-\dfrac{7}{18}$, то $\min\limits_{[-\pi;\pi]}f(x)>-\dfrac{7}{18}$.

Ответ: доказано.

2а) Функция пересекает ось абсцисс в точке $x=-\sqrt[3]{4}$ и ось ординат – в точке $y=4$. Имеет вертикальную асимптоту $x=-1$ и горизонтальную асимптоту $y=1$. Найдем производную функцию $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+1)^3-(x+4)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=3\dfrac{x^2-4}{(x+1)^4}$. Критические точки функции $x=\pm 2$. При этом $x_{\min}=2$ и $y_{\min}=f(2)=\dfrac{4}{9}$; $x_{\max}=-2$ и $y_{\max}=f(-2)=4$. Исследовав промежутки возрастания и убывания, легко построить эскиз графика функции.

Ответ: см. график.

2б) После построения графика функции $f(x)$ легко ответить на вопрос о количестве корней уравнения $f(x) = a$. Имеем: при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ – 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ – 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ – 3 корня.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ – 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ – 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ – 3 корня.

3. ОДЗ данного уравнения $x \le \frac{19}{2}$. Производная левой части уравнения $f_1'(x) = 3x^2 - 4x + 8$ при всех x положительна. Производная правой части уравнения $f_2'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{19-3x}}$ отрицательна при $x \in \left(-\infty; \frac{19}{3}\right)$. Тогда по теореме о корне данное уравнение имеет единственный корень, который находится подбором. Получаем $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

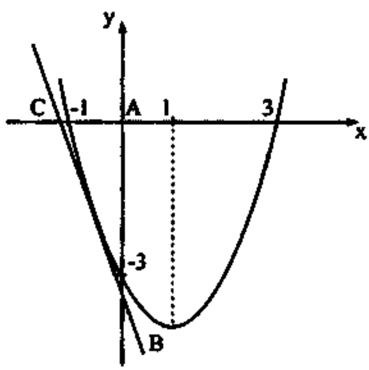
4. Пусть одно из чисел равно x, тогда второе равно $48 - x$. Найдем сумму куба первого числа и квадрата второго числа и получим функцию $f(x) = x^3 + (48 - x)^2$. Найдем ее производную $f'(x) = 3x^2 - 2(48 - x) = 3x^2 + 2x - 96$. Критические точки функции $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+288}}{3} = \frac{-1 \pm 17}{3}$ или $x_1 = -6$ и $x_2 = \frac{16}{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и нарисуем диаграмму знаков производной. Видно, что функция имеет минимум при $x = \frac{16}{3}$. Тогда второе число $48 - x = \frac{128}{3}$. Эти два числа положительные, что соответствует условию задачи.

Заметим, что если числа поменять местами, то по аналогии будем иметь функцию $f(x) = (48 - x)^3 + x^2$. Производная этой функции

$f'(x) = -3(48-x)^2 + 2x = -\left(3x^2 - 300x + 6912\right)$. Видно, что функция $f(x)$ убывает при всех x и наименьшего значения не имеет.

Ответ: $\dfrac{16}{3}$ и $\dfrac{128}{3}$.

5. Предположим, что касательная проведена в точке с абсциссой x_0. Напишем уравнение этой касательной. Найдем производную функции $f'(x) = 2x - 2$. Тогда уравнение касательной $y = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0 - 3$ или $x = (2x_0 - 2)x - x_0^2 - 3$. Найдем точки пересечения этой касательной с осями координат, то есть катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC.



При $x = 0$ находим $y = -x_0^2 - 3$ и длина катета $AB = -y = x_0^2 + 3$. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = 2(x_0 - 1)x - x_0^2 - 3$, откуда $x = \dfrac{x_0^2 + 3}{2(x_0 - 1)}$. Сначала рассмотрим случай $x_0 < 1$, тогда длина катета $AC = x = \dfrac{x_0^2 + 3}{2(1 - x_0)}$. Поэтому площадь заданного треугольника $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = \dfrac{\left(x_0^2 + 3\right)^2}{4(1 - x_0)}$. Определим значение x_0, при котором эта площадь наименьшая.

По переменной x_0 найдем производную функции $S' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2\left(x_0^2 + 3\right) \cdot 2x_0(1 - x_0) + \left(x_0^2 + 3\right)^2 \cdot 1}{(1 - x_0)^2} = \dfrac{\left(x_0^2 + 3\right)\left(3x_0^2 - 4x_0 - 3\right)}{4(1 - x_0)^2}$. Критические точки функции задаются уравнением $3x_0^2 - 4x_0 - 3 = 0$, корни которого $x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$. С учетом ограничения $x_0 < 1$ подходит только корень $x_0 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3} \approx -0,5$. Диаграмма знаков производной показывает, что в этой точке, действительно, функция $S(x_0)$ имеет минимум (равный примерно 1,5).

Случай $x_0 > 1$ рассматривается аналогично. Тогда касательная проводится к правой ветви параболы. Площадь треугольника $S = -\frac{(x_0^2 + 3)^2}{4(x_0 - 1)}$. В этом случае критическая точка $x_0 = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \approx 1,8$ и в ней также достигается минимум функции $S(x_0)$. Оценки показывают, что значение этого минимума примерно равно 9.

Сравнивая значения S в двух случаях, получаем, что касательную надо проводить в точке $x_0 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $x_0 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}$.

Уроки 92–93. Зачетная работа по теме «Производная и ее применения»

Цель: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найти производную функции:

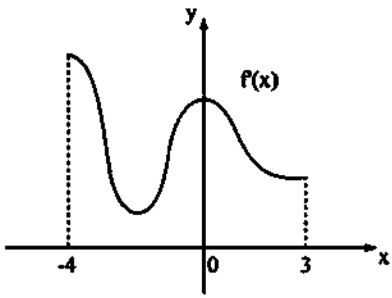
а) $f(x) = 3x^7 - 2\sqrt{x} + 5$; б) $f(x) = 5\sin x - 2\cos x + 3\operatorname{tg} x$.

2. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если $f(x) = x^3 + x - \sqrt{5}$ и $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{7}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x - 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

4. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ и постройте ее график.

5. На рисунке приведена зависимость производной функции $f'(x)$ на отрезке [−4; 3]. В каких точках функция $f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значение?



6. Тело движется по прямой по закону $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 4t - 2$. Найдите наименьшую и наибольшую скорость тела при $t \in [1; 4]$.

В

7. Найдите производную функции $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$.

8. Найдите уравнения общей касательной к параболам $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$ и $f_2(x) = x^2 + x + 1$.

9. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 8ax - a\sin 6x - 7x - \sin 5x$ возрастает на всей числовой оси и не имеет критических точек?

10. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от координатных осей касательной к кривой $f(x)=2\sqrt{x-4}-\frac{8}{3}$, проведенной параллельно прямой $y=5+\frac{1}{3}x$.

C

11. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\frac{3x^2+2x+2}{x+1}$.

12. При каких значениях параметров a и b все экстремумы функции $f(x)=a^2x^3-0{,}5ax^2-2x-b$ положительны и минимум находится в точке $x_0=\frac{1}{3}$?

13. К графику функции $y=-\frac{1}{12}x^2+x-\frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y=3|x+6|-\frac{7}{3}$ в точках A и B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $C\left(-6;-\frac{7}{3}\right)$, $\angle CAB=2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\angle CBA$.

Вариант 2

А

1. Найти производную функции:

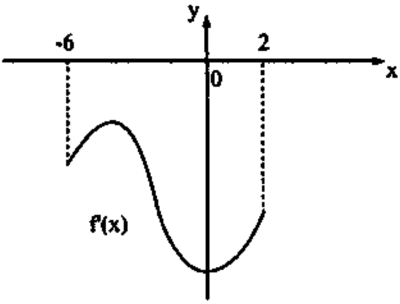
а) $f(x)=5x^6-2\sqrt[3]{x}+4$; б) $f(x)=6\sin x-4\cos x-2\operatorname{tg}x$.

2. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=2x^3-x^2-\sqrt{3}$ и $g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}+\sqrt{11}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x+2$ и постройте ее график.

5. На рисунке приведена зависимость производной функции $f'(x)$ на отрезке $[-6;2]$. В каких точках функция $f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значение?



6. Тело движется по прямой по закону $x(t)=-\frac{t^3}{3}+3t^2+8t+1$. Найдите наименьшую и наибольшую скорость тела при $t\in[1;4]$.

B

7. Найдите производную функции $f(x)=\cos(\cos(\cos x))$.

8. Найдите уравнения общей касательной к параболам $f_1(x)=x^2+x-2$ и $f_2(x)=-x^2+7x-11$.

9. При каких значениях параметра a функция $f(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5x$ убывает на всей числовой оси и не имеет критических точек?

10. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от координатных осей касательной к кривой $f(x)=2\sqrt{x-3}-\frac{5}{2}$, проведенной параллельно прямой $y=7+\frac{1}{2}x$.

C

11. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x-3}$.

12. При каких значениях параметров a и b все экстремумы функции $f(x)=\frac{5a^2}{3}x^3+2ax^2-9x+b$ положительны и максимум находится в точке $x_0=-\frac{5}{9}$?

13. К графику функции $y=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{9}{4}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y=\frac{5}{4}-2|x+2|$ в точках A и B. Най-

дите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $C\left(-2; \frac{5}{4}\right)$, $\angle CAB = 2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \angle CBA$.

IV. Разбор заданий

Вариант 1

1а) Используя правила дифференцирования и формулу для производной степенной функции, найдем производную $f'(x) = \left(3x^7 - 2x^{\frac{1}{2}} + 5\right)' = 3\cdot 7x^6 - 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 21x^6 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответ: $21x^6 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1б) Используя правила дифференцирования и таблицу производных тригонометрических функций, найдем производную $f'(x) = (5\sin x - 2\cos x + 3\,\mathrm{tg}\,x)' = 5\cos x - 2(-\sin x) + 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$

$= 5\cos x + 2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x}$.

Ответ: $5\cos x + 2\sin x + \frac{3}{\cos^2 x}$.

2. Сначала найдем производные данных функций: $f'(x) = 3x^2 + 1$ и $g'(x) = 6x + 1$. Теперь решим неравенство $f'(x) > g'(x)$, или $3x^2 + 1 > 6x + 1$, или $x(x-2) > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.

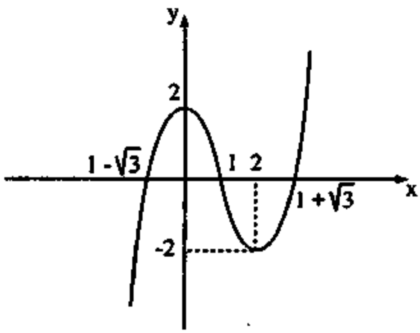
Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.

3. Найдем производную $f'(x) = 2x + 2$ и вычислим значения производной и функции в точке касания $x_0 = 3$. Получаем: $f'(x_0) = f'(3) = 8$ и $f(x_0) = f(3) = 7$. Запишем уравнение касательной $y = 8(x-3) + 7$, или $y = 8x - 17$.

Ответ: $y = 8x - 17$.

4. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y = 2$, ось абсцисс – в точках $x = 1$ и $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Найдем производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Критические точки функции $x = 0$ и $x = 2$. Поэтому функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; \infty)$ и убывает на промежутке $[0; 2]$. В точке $x = 0$ функция имеет максимум и

$y_{max} = y(0) = 2$, в точке $x = 2$ – имеет минимум и $y_{min} = y(2) = -2$. Строим график функции.



Ответ: см. график.

5. Видно, что при всех x из промежутка $[-4; 3]$ производная $f'(x)$ положительна. Поэтому функция $f(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение функции $f(x)$ достигается на левой границе отрезка (то есть $\min\limits_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4)$) и наибольшее значение – на правой границе отрезка (то есть $\max\limits_{[-4;\,3]} f(x) = f(3)$).

Ответ: $\min\limits_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4)$; $\max\limits_{[-4;\,3]} f(x) = f(3)$.

6. Так как скорость тела есть производная перемещения, то найдем $V(t) = x'(t) = t^2 - 4t + 4$. Вычислим критические точки этой функции. Получаем $V'(t) = 2t - 4$. Поэтому функция имеет одну критическую точку $t = 2$ и в этой точке достигается минимум. Найдем значение $V(t)$ в такой точке и на границах промежутка: $V(2) = 0$; $V(1) = 1$ и $V(4) = 4$. Следовательно, $\min\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(2) = 0$ и $\max\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(4) = 4$.

Ответ: $\min\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(2) = 0$; $\max\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(4) = 4$.

7. Используем формулу для производной сложной функции и получим $f'(x) = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$.

Ответ: $\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$.

8. Пусть касание с функцией $f_1(x)$ происходит в точке x_1 и с функцией $f_2(x)$ – в точке x_2. Запишем уравнения соответствующих касательных: $y_1 = (2x_1 - 5)x - x_1^2 + 6$ и $y_2 = (2x_2 + 1)x - x_2^2 + 1$. На самом деле эти уравнения задают одну и ту же (общую) касательную. Для этого требуется, чтобы угловые коэффициенты и свобод-

ные члены касательных были одинаковыми. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 5 = 2x_2 - 1 \\ -x_1^2 + 6 = -x_2^2 + 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^2 - x_2^2 = 5 \end{cases}$. Используя первое уравнение, запишем систему в виде линейной $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3} \end{cases}$, откуда $x_1 = \dfrac{7}{3}$ и $x_2 = -\dfrac{2}{3}$. Теперь подставим значение $x_1 = \dfrac{7}{3}$ в уравнение первой касательной и найдем уравнение общей касательной $y = \left(2 \cdot \dfrac{7}{3} - 5\right)x - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 + 6$ или $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{9}$.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{9}$.

9. Найдем производную данной функции $f'(x) = 8a - 6a\cos 6x - 7 - 5\cos 5x$. Функция $f(x)$ возрастает на всей числовой оси и не имеет критических точек, если при всех x производная $f'(x) > 0$. Получаем неравенство $8a - 6a\cos 6x - 7 - 5\cos 5x > 0$, которое должно выполняться при всех значениях x. Очевидно, оно будет выполняться, если будет справедливо для наименьшей величины левой части неравенства. Возьмем значения $\cos 6x = 1$ и $\cos 5x = 1$ и получим неравенство $2a - 12 > 0$, решение которого $a > 6$.

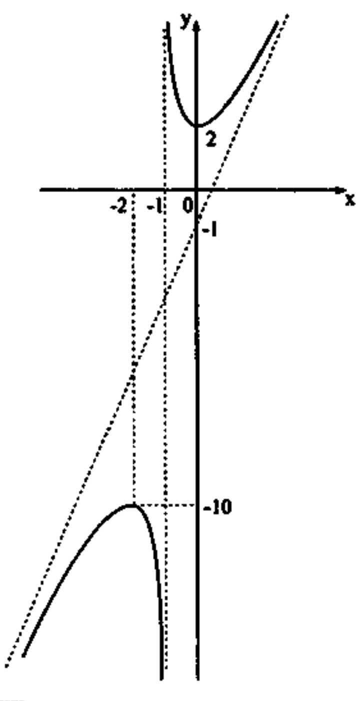
Ответ: $a > 6$.

10. Пусть касание происходит в точке x_0. Найдем производную $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$. Напишем уравнение касательной $y = \dfrac{1}{\sqrt{x_0 - 4}}(x - x_0) + 2\sqrt{x_0 - 4} - \dfrac{8}{3}$. Так как касательная параллельна прямой $y = 5 + \dfrac{1}{3}x$, то ее угловой коэффициент равен $\dfrac{1}{3}$. Получаем уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{x_0 - 4}} = \dfrac{1}{3}$, корень которого $x_0 = 13$. Тогда уравнение касательной $y = \dfrac{1}{3}(x - 13) + 6 - \dfrac{8}{3}$ или $y = \dfrac{1}{3}x - 1$. Найдем точки пересечения касательной с осями координат. При $x = 0$ имеем $y = -1$,

при $y = 0$ получаем уравнение $0=\frac{1}{3}x-1$, откуда $x = 3$. Поэтому в треугольнике ABC катеты $AB = 1$ и $AC = 3$. Площадь его равна $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

11. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y = 2$ и не пересекает ось абсцисс. Функция имеет наклонную асимптоту $y=3x-1$ и вертикальную $x=-1$. Найдем производную функции $f'(x)=\frac{(6x+2)(x+1)-(3x^2+2x+2)}{(x+1)^2}=\frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; \infty)$ и убывает на промежутках $[-2; -1)$ и $(-1; 0]$. Поэтому при $x = -2$ функция имеет максимум $f(-2) = -10$ и при $x = 0$ –минимум $f(0) = 2$. Теперь легко построить график функции.



Ответ: см. график.

12. Найдем производную функции $f'(x)=3a^2x^2-ax-2$. Так как минимум функции находится в точке $x_0=\frac{1}{3}$, то эта точка удовлетворяет уравнению $3a^2x^2-ax-2=0$. Тогда получаем уравнение: $\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{3}a-2=0$ или $a^2-a-6=0$, корни которого $a=-2$ и $a=3$. Рассмотрим эти случаи.

а) При $a=-2$ уравнение для критических точек имеет вид $12x^2+2x-2=0$ или $6x^2+x-1=0$, корни которого $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{1}{3}$. Расставим эти точки на координатной оси и нарисуем знаки производной.

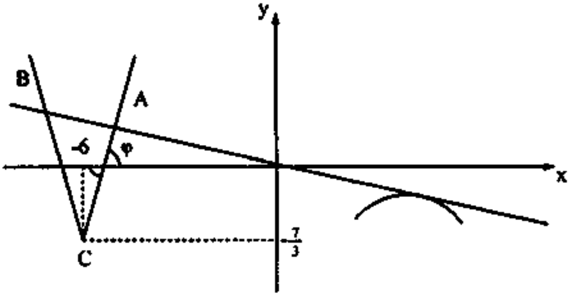
Видно, что при $x=\frac{1}{3}$ функция, действительно, имеет минимум. Найдем экстремумы функции $f_{\max}(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-b$ и $f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{27}-b$. По условию эти экстремумы положительны. Получаем систему неравенств $\begin{cases}\frac{3}{4}-b>0\\-\frac{11}{27}-b>0\end{cases}$, решение которой $b<-\frac{11}{27}$. Итак, при $a=-2$ имеем $b\in\left(-\infty;-\frac{11}{27}\right)$.

б) При $a=3$ уравнение для критических точек имеет вид $27x^2-3x-2=0$, корни которого $x_1=-\frac{2}{9}$ и $x_2=\frac{1}{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и отметим знаки производной.

При $x=\frac{1}{3}$ функция $f(x)$ имеет минимум. Найдем экстремумы функции $f_{\max}(x)=f\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{22}{81}-b$ и $f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}-b$. По условию эти экстремумы положительны. Получаем систему неравенств $\begin{cases}\frac{22}{81}-b>0\\ -\frac{1}{2}-b>0\end{cases}$, решение которой $b<-\frac{1}{2}$. Итак, при $a=3$ получили $b\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: при $a=-2$ $b\in\left(-\infty;-\frac{11}{27}\right)$ и при $a=3$ $b\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

13. В точке $C\left(-6;-\frac{7}{3}\right)$ находится вершина графика функции $y=3|x+6|-\frac{7}{3}$. Тангенс угла наклона прямой AC (то есть прямой $y=3x+\frac{47}{3}$) равен 3 (то есть $\operatorname{tg}\varphi=3$). В ΔABC найдем $\angle A$. Можем составить систему уравнений $\begin{cases}2\varphi+C=\pi\\ A=2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+B\\ A+B+C=\pi\end{cases}$. Из первого уравнения выразим $C=\pi-2\varphi$, из второго $B=A-2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$ и подставим в третье уравнение. Получаем: $A+A-2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\pi-2\varphi=\pi$, откуда $A=\varphi+\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$ (учтено, что при $\operatorname{tg}\varphi=3$ $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$). Найдем $\cos A=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=0$ и $\angle A=90°$. Таким образом, ΔABC прямоугольный и радиус описанной окружности $R=\frac{1}{2}BC$.



Пусть касательная к параболе проведена в точке x_0. Напишем уравнение касательной $y=\left(-\frac{x_0}{6}+1\right)(x-x_0)-\frac{x_0^2}{12}+x_0-\frac{16}{3}$ или $y=\left(-\frac{x_0}{6}+1\right)x+\frac{x_0^2}{12}-\frac{16}{3}$. Так как прямая AC и касательная AB перпендикулярны, то угловой коэффициент касательной равен $-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=-\frac{1}{3}$. Для нахождения точки касания получаем уравнение $-\frac{x_0}{6}+1=-\frac{1}{3}$, откуда $x_0=8$. Тогда уравнение касательной $y=-\frac{1}{3}x$.

Уравнение прямой BC: $y=-3(x+6)-\frac{7}{3}$ или $y=-3x-\frac{61}{3}$. Найдем координаты точки B, решив систему уравнений $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x \\ y=-3x-\frac{61}{3} \end{cases}$.

Получаем $x=-\frac{61}{8}$ и $y=\frac{61}{24}$. Зная координаты точек $B\left(-\frac{61}{8};\frac{61}{24}\right)$ и $C\left(-6;-\frac{7}{3}\right)$, найдем длину отрезка $BC=\sqrt{\left(-6+\frac{61}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}-\frac{61}{24}\right)^2}=$ $=\sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^2+\left(-\frac{39}{8}\right)^2}=\frac{13}{8}\sqrt{10}$ и радиус описанной окружности $R=\frac{1}{2}BC=\frac{13}{16}\sqrt{10}$.

Ответ: $\frac{13}{16}\sqrt{10}$.

Вариант 2

1а) Используя правила дифференцирования и формулу для производной степенной функции, найдем производную

$$f'(x)=\left(5x^6-2x^{\frac{1}{3}}+4\right)'=5\cdot 6x^5-2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=30x^5-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ответ: $30x^5-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

1б) Используя правила дифференцирования и таблицу производных тригонометрических функций, найдем производную

$$f'(x)=(6\sin x-5\cos x-2\,\mathrm{tg}\,x)'=6\cos x-4(-\sin x)-2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=6\cos x+4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $6\cos x+4\sin x-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

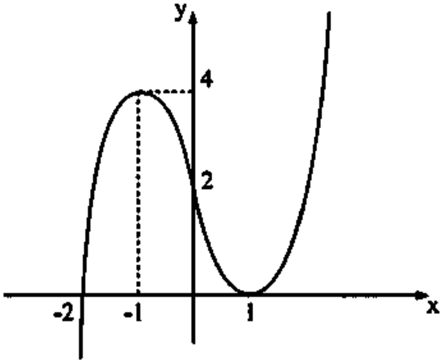
2. Сначала найдем производные данных функций: $f'(x)=6x^2-2x$ и $g'(x)=3x^2+x$. Теперь решим неравенство $f'(x)>g'(x)$ или $6x^2-2x>3x^2+x$ или $x(x-1)>0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим $x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,\infty)$.

3. Найдем производную $f'(x)=2x-2$ и вычислим значения производной и функции в точке касания $x_0=2$. Получаем: $f'(x_0)=f'(2)=2$ и $f(x_0)=f(2)=-3$. Запишем уравнение касательной $y=2(x-2)-3$ или $y=2x-7$.

Ответ: $y=2x-7$.

4. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y=2$, ось абсцисс – в точках $x=-2$ и $x=1$. Найдем производную функции $f'(x)=3x^2-3$. Критические точки функции $x=-1$ и $x=1$. Поэтому функция возрастает на промежутках $(-\infty;\,-1]$ и $[1;\,\infty)$ и убывает на промежутке $[-1;\,1]$. В точке $x=-1$ функция имеет максимум и $y_{\max}=y(-1)=4$, в точке $x=1$ – имеет минимум и $y_{\min}=y(1)=0$. Строим график функции.



Ответ: см. график.

5. Видно, что при всех x из промежутка $[-6; 2]$ производная $f'(x)$ отрицательна. Поэтому функция $f(x)$ убывает. Значит, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается на левой границе отрезка (то есть $\max\limits_{[-6;\,2]} f(x) = f(-6)$) и наименьшее значение – на правой границе отрезка (то есть $\min\limits_{[-6;\,2]} f(x) = f(2)$).

Ответ: $\max\limits_{[-6;\,2]} f(x) = f(-6)$; $\min\limits_{[-6;\,2]} f(x) = f(2)$.

6. Так как скорость тела есть производная перемещения, то найдем $V(t) = x'(t) = -t^2 + 6t + 8$. Вычислим критические точки этой функции. Получаем $V'(t) = -2t + 6$. Поэтому функция имеет одну критическую точку $t = 3$ и в этой точке достигается максимум. Найдем значение $V(t)$ в этой точке и на границах промежутка: $V(3) = 17$; $V(1) = 13$ и $V(4) = 16$. Следовательно, $\min\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(1) = 13$ и $\max\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(3) = 17$.

Ответ: $\min\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(1) = 13$; $\max\limits_{[1;\,4]} V(t) = V(3) = 17$.

7. Используем формулу для производной сложной функции и получим $f'(x) = -\sin(\cos(\cos x)) \cdot (-\sin(\cos x)) \cdot (-\sin x) =$
$= -\sin(\cos(\cos x)) \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin x$.

Ответ: $-\sin(\cos(\cos x)) \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin x$.

8. Пусть касание с функцией $f_1(x)$ происходит в точке x_1 и с функцией $f_2(x)$ – в точке x_2. Запишем уравнения соответствующих касательных: $y_1 = (2x_1 + 1)x - x_1^2 - 2$ и $y_2 = (-2x_2 + 7)x + x_2^2 - 11$. На самом деле эти уравнения задают одну и ту же (общую) касательную. Для этого требуется, чтобы угловые коэффициенты и свобод-

ные члены касательных были одинаковыми. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+1=-2x_2+7 \\ -x_1^2-2=x_2^2-11 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1^2+x_2^2=9 \end{cases}$. Из первого уравнения выразим $x_2=3-x_1$ и подставим во второе. Получаем квадратное уравнение $x_1^2+(3-x_1)^2=9$ или $x_1(x_1-3)=0$, корни которого $x_1=0$ (тогда $x_2=3$) и $x_1=3$ (тогда $x_2=0$). Теперь подставим значения x_1 в уравнение первой касательной и найдем уравнения общих касательных. При $x_1=0$ получаем уравнение $y=x-2$, при $x_1=3$ имеем уравнение $y=7x-11$.

Ответ: $y=x-2$ и $y=7x-11$.

9. Найдем производную данной функции $f'(x)=7a\cos 7x+$ $+8a+4\cos 4x-5$. Функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси и не имеет критических точек, если при всех x производная $f'(x)<0$. Получаем неравенство $7a\cos 7x+8a+4\cos 4x-5<0$, которое должно выполняться при всех значениях x. Очевидно, оно будет выполняться, если будет справедливо для наибольшей величины левой части неравенства. Возьмем значения $\cos 7x=1$ и $\cos 5x=1$ и получим неравенство $15a-1<0$, решение которого $a<\dfrac{1}{15}$.

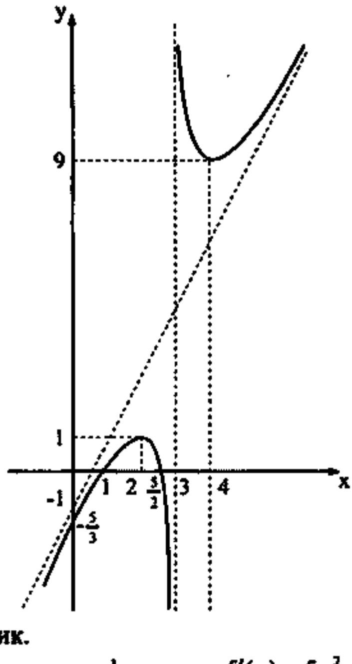
Ответ: $a<\dfrac{1}{15}$.

10. Пусть касание происходит в точке x_0. Найдем производную $f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$. Напишем уравнение касательной $y=\dfrac{1}{\sqrt{x_0-3}}(x-x_0)+2\sqrt{x_0-3}-\dfrac{5}{2}$. Так как касательная параллельна прямой $y=7+\dfrac{1}{2}x$, то ее угловой коэффициент равен $\dfrac{1}{2}$. Получаем уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{x_0-3}}=\dfrac{1}{2}$, корень которого $x_0=7$. Тогда уравнение касательной $y=\dfrac{1}{2}(x-7)+4-\dfrac{5}{2}$ или $y=\dfrac{1}{2}x-2$. Найдем точки пересечения касательной с осями координат. При $x=0$ имеем $y=-2$, при $y=0$ получаем уравнение $0=\dfrac{1}{2}x-2$, откуда $x=4$. Поэтому в

треугольнике ABC катеты $AB = 2$ и $AC = 4$. Площадь его равна $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 4$.

Ответ: 4.

11. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y = -\frac{5}{3}$ и ось абсцисс – в точках $x = 1$ и $x = \frac{5}{2}$. Функция имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ и наклонную асимптоту $y = 2x - 1$. Найдем производную функции $f'(x) = \frac{(4x-7)(x-3)-(2x^2-7x+5)}{(x-3)^2} = \frac{2(x^2-6x+8)}{(x-3)^2}$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[4; \infty)$ и убывает на промежутках $[2; 3)$ и $(3; 4]$. Поэтому при $x = 2$ функция имеет максимум $f(2) = 1$ и при $x = 4$ – минимум $f(4) = 9$. Теперь легко построить график функции.



Ответ: см. график.

12. Найдем производную функции $f'(x) = 5a^2x^2 + 4ax - 9$. Так как максимум функции находится в точке $x_0 = -\frac{5}{9}$, то эта точка удовле-

творяет уравнению $5a^2x^2+4ax-9=0$. Тогда получаем уравнение: $\frac{125}{81}a^2-\frac{20}{9}a-9=0$ или $125a^2-180a-729=0$, корни которого $a=-\frac{9}{5}$ и $a=\frac{81}{25}$. Рассмотрим эти случаи.

а) При $a=-\frac{9}{5}$ уравнение для критических точек имеет вид $5\cdot\frac{81}{25}x^2-\frac{36}{5}x-9=0$ или $9x^2-4x-5=0$, корни которого $x=-\frac{5}{9}$ и $x=1$. Отметим эти точки на координатной оси и проставим знаки производной.

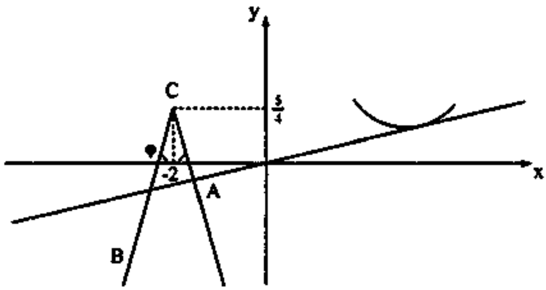
Видно, что при $x=-\frac{5}{9}$ функция, действительно, имеет максимум. Найдем экстремумы функции $f_{\max}(x)=f\left(-\frac{5}{9}\right)=-\frac{80}{27}+b$ и $f_{\min}(x)=f(1)=-\frac{36}{5}+b$. По условию эти экстремумы положительны. Получаем систему неравенств $\begin{cases}-\frac{80}{27}+b>0\\-\frac{36}{5}+b>0\end{cases}$, решение которой $b>\frac{36}{5}$. Итак, при $a=-\frac{9}{5}$ $b\in\left(\frac{36}{5};\infty\right)$.

б) При $a=\frac{81}{25}$ уравнение для критических точек имеет вид $5\cdot\frac{81^2}{25^2}x^2+4\cdot\frac{81}{25}x-9=0$ или $729x^2+180x-125=0$, корни которого $x_1=-\frac{5}{9}$ и $x_2=\frac{25}{81}$. Отметим эти точки на координатной оси и отметим знаки производной.

При $x=-\frac{5}{9}$ функция $f(x)$ имеет максимум. Найдем экстремумы функции $f_{max}(x)=f\left(-\frac{5}{9}\right)=4+b$ и $f_{min}(x)=f\left(\frac{25}{81}\right)=-\frac{400}{243}+b$. По условию эти экстремумы положительны. Получаем систему неравенств $\begin{cases}4+b>0\\ -\frac{400}{243}+b>0\end{cases}$, решение которой $b>\frac{400}{243}$. Итак, при $a=\frac{81}{25}$ $b\in\left(\frac{400}{243};\infty\right)$.

Ответ: при $a=-\frac{9}{5}$ $b\in\left(\frac{36}{5};\infty\right)$ и при $a=\frac{81}{25}$ $b\in\left(\frac{400}{243};\infty\right)$.

13. В точке $C\left(-2;\frac{5}{4}\right)$ находится вершина графика функции $y=\frac{5}{4}-2|x+2|$. Тангенс угла наклона прямой BC (то есть прямой $y=2x+\frac{21}{4}$) равен 2 (то есть $\operatorname{tg}\varphi=2$). В ΔABC найдем $\angle A$. Можно составить систему уравнений $\begin{cases}2\varphi+C=\pi\\ A=2\arccos\frac{2}{\sqrt5}+B\\ A+B+C=\pi\end{cases}$. Из первого уравнения выразим $C=\pi-2\varphi$, из второго $B=A-2\arccos\frac{2}{\sqrt5}$ и подставим в третье уравнение. Получаем: $A+A-2\arccos\frac{2}{\sqrt5}+\pi-2\varphi=\pi$, откуда $A=\varphi+\arccos\frac{2}{\sqrt5}=\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{2}{\sqrt5}$ (учтено, что при $\operatorname{tg}\varphi=2$ $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt5}$). Найдем $\cos A=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=0$ и $\angle A=90^\circ$. Таким образом, ΔABC прямоугольный и радиус описанной окружности $R=\frac{1}{2}BC$.



Пусть касательная к параболе проведена в точке x_0. Напишем уравнение касательной $y=\left(\frac{1}{2}x_0-1\right)(x-x_0)+\frac{1}{4}x_0^2-x_0+\frac{9}{4}$ или $y=\left(\frac{1}{2}x_0-1\right)x-\frac{1}{4}x_0^2+\frac{9}{4}$. Так как прямая AC и касательная AB перпендикулярны, то угловой коэффициент касательной равен $\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1}{2}$. Для нахождения точки касания получаем уравнение $\frac{1}{2}x_0-1=\frac{1}{2}$, откуда $x_0=3$. Тогда уравнение касательной $y=\frac{1}{2}x$.

Уравнение прямой BC: $y=\frac{5}{4}+2(x+2)$ или $y=2x+\frac{21}{4}$. Найдем ординаты точки B, решив систему уравнений $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=2x+\frac{21}{4} \end{cases}$. Получаем $x=-\frac{7}{2}$ и $y=-\frac{7}{4}$. Зная координаты точек $B\left(-\frac{7}{2};-\frac{7}{4}\right)$ и $C\left(-2;\frac{5}{4}\right)$, найдем длину отрезка $BC=\sqrt{\left(-2+\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}+\frac{7}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ и радиус описанной окружности $R=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

Повторение курса 10 класса

Подготовка к итоговой контрольной работе

Уроки 94–95. Повторение темы «Основные тригонометрические функции»

Цель: вспомнить основные формулы тригонометрии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

В начале урока полезно с помощью фронтального опроса учащихся выписать на доске **основные тригонометрические формулы** (по группам).

Связь между функциями одного угла

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (основное тригонометрическое тождество)

2) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in Z$)

3) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha\neq\pi n$, где $n\in Z$)

Функции суммы и разности углов

4) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

5) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\sin\beta\mp\sin\alpha\cos\beta$

Преобразование суммы функций в произведение

6) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

7) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

8) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

9) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Преобразование произведения функций в сумму

10) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

11) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$

12) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$

Функция кратных углов

13) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

14) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (формулы двойного угла)

15) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

16) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (формулы понижения степени)

III. Задание на уроке (вопросы и задачи на повторение)
№ 1; 2; 4 (2); 5 (3); 7 (2); 8 (3); 9 (2); 10 (3).

IV. Задание на дом (вопросы и задачи на повторение)
№ 3; 4 (3); 6 (3); 7 (3); 8 (2); 9 (3); 10 (2).

V. Подведение итогов урока

Уроки 96–97. Повторение темы «Тригонометрические функции, уравнения, неравенства»

Цель: вспомнить построение графиков функции и решение основных уравнений и неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Полезно напомнить определения основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс и котангенс), их свойства и графики.

При решении тригонометрических уравнений необходимо вспомнить **определения обратных** тригонометрических **функций** (см. таблицу).

Функция	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Определение	1) $\sin y = x$ 2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{\pi}\right]$	1) $\cos y = x$ 2) $y \in [0; \pi]$	1) $\operatorname{tg} y = x$ 2) $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	1) $\operatorname{ctg} y = x$ 2) $y \in (0; \pi)$

Полезно также выписать **решения** простейших тригонометрических уравнений.

1) $\sin x = a$ $\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \ \left(|a| \le 1,\ n \in Z\right)$

2) $\cos x = a$ $\quad x = \pm\arccos a + 2\pi n \ \left(|a| \le 1,\ n \in Z\right)$

3) $\operatorname{tg} x = a$ $\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n \ \left(n \in Z\right)$

4) $\operatorname{ctg} x = a$ $\quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \ \left(n \in Z\right)$

III. Задание на уроке (вопросы и задачи на повторение)
№ 11; 14; 16; 17; 19; 21; 24; 25 (1).

IV. Задание на дом (вопросы и задачи на повторение)
№ 12; 13; 15; 18; 20; 22 (2); 23 (2); 25 (2).

V. Подведение итогов урока

Уроки 98–99. Повторение темы «Производная и ее применения»

Цель: вспомнить формулы дифференцирования, таблицу производных и применения производной.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Полезно напомнить (с помощью учащихся) основные понятия, связанные с производной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Правила вычисления производных

1) $(U + V)' = U' + V'$. Следствие: $(U + C)' = U'$, где C – постоянная величина.

2) $(UV)' = U'V + UV'$. Следствие: $(CU)' = CU'$, где C – постоянная величина.

3) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

4) $\left(U(V(x))\right)' = U'_v \cdot V'_x$ (производная сложной функции).

Производные основных функций

Функция $f(x)$	C	x	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Производная $f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Функция $f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
Производная $f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Геометрический смысл производной – угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0, равен $f'(x)$. Тогда **уравнение касательной** $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Физический смысл производной – производная от координаты по времени есть **скорость** (аналогично: **производная от скорости** по времени есть **ускорение**).

Признак **возрастания (убывания)** функции: если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в каждой точке интервала I, то функция $f(x)$ **возрастает (убывает)** на промежутке I.

Условие экстремума: если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то **производная** $f'(x)$ **равна нулю или не существует.**

Признак **максимума (минимума)** функции: если в точке x_0 **производная** функции $f'(x)$ **меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс)**, то точка x_0 – **точка максимума (минимума).**

Чтобы найти **наибольшее и наименьшее значения** функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно **вычислить значения** функции **во всех критических точках и на концах отрезка**, а затем из полученных чисел **выбрать наибольшее и наименьшее.**

III. Задание на уроке (вопросы и задачи на повторение)
№ 1; 3 (2, 3); 5 (3); 8 (3); 10 (2); 11 (3).

IV. Задание на дом (вопросы и задачи на повторение)
№ 2; 4 (3); 7; 9; 10 (3); 11 (2).

V. Подведение итогов урока

Уроки 100–101. Итоговая контрольная работа

Цель: итоговая аттестация учащихся по базовым темам курса.

Ход урока

I. Характеристика контрольной работы

Работа составлена в двух вариантах. Все задачи имеют примерно одинаковую сложность и контролируют основные навыки:

1) умение использовать основные формулы для преобразования тригонометрических выражений и вычисления их значений;

2) представление об обратных тригонометрических функциях, выполнение простейших преобразований и вычислений с такими функциями;

3) умение строить графики прямых и обратных тригонометрических функций;

4) умение решать тригонометрические уравнения, системы уравнений, неравенства;

5) знание понятия и свойств производной функции, умение вычислять производные;

6) использование производной для исследования функции и построения ее графика, умение анализировать уравнения;

7) знание геометрического и физического смысла производной;

8) умение применять производную для решения математических, физических и прикладных задач.

II. Оценка результатов работы

Оценка «5» ставится за любые пять правильно решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Поэтому у учащихся имеется некоторая свобода выбора за счет шестой задачи.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Постройте график уравнения $\sin(y-x)=\sin x$.

2. Решите уравнение $6\sin^2 x-5\cos x-5=0$.

3. Решите неравенство $\sin 2x>\sqrt{3}\cos 2x$.

4. Найдите наименьшее значение выражения
$2\operatorname{tg}^2 x+8\operatorname{tg} x+\sin^2 y-6\sin y$.

5. Определите угол между двумя касательными, проведенными из точки $(0;-2)$ к параболе $f(x)=x^2$.

6. Число 450 представить в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых относятся как 2:3, а произведение всех трех имеет наибольшее значение.

Вариант 2

1. Постройте график уравнения $\cos(y-x)=\cos x$.

2. Решите уравнение $7\cos^2 x-13\sin x-13=0$.

3. Решите неравенство $\cos 3x>\sqrt{3}\sin 3x$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $4\operatorname{ctg}^2 x+16\operatorname{ctg} x+$ $+\cos^2 y+4\cos y$.

5. Определите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; 2) к параболе $f(x)=-3x^2$.

6. Число 420 представить в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых относятся как 3:4, а произведение всех трех имеет наибольшее значение.

IV. Разбор заданий вариантов

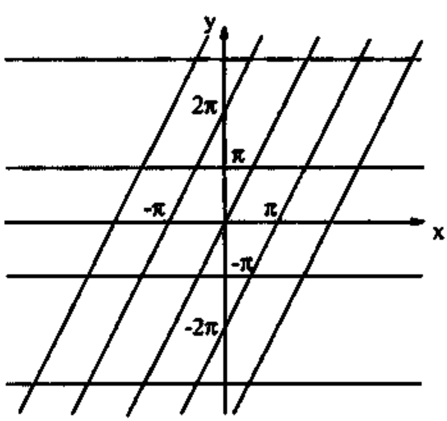
Вариант 1

1. Найдем более простую связь между переменными y и x. Для этого перенесем все члены равенства в левую часть $\sin(y-x)-\sin x=0$ и преобразуем разность функций в произведение $2\sin\dfrac{y-2x}{2}\cos\dfrac{y}{2}=0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Возникают два случая:

а) $\sin\dfrac{y-2x}{2}=0$, тогда $\dfrac{y-2x}{2}=\pi n$ и $y=2x+2\pi n$, где $n\in Z$;

б) $\cos\dfrac{y}{2}=0$, тогда $\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ и $y=\pi+2\pi k$, где $k\in Z$.

Строим семейства полученных прямых.



Ответ: см. график.

2. Используем основное тригонометрическое тождество и получим уравнение $6(1-\cos^2 x)-5\cos x-5=0$ или $0=6\cos^2 x+5\cos x-1$. Введем новую переменную $t=\cos x$, получим квадратное уравнение $0=6t^2+5t-1$, корни которого $t_1=-1$ и $t_2=\frac{1}{6}$. Вернемся к старой переменной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\cos x=-1$, его решения $x=\pi+2\pi n$ (где $n\in Z$);

б) $\cos x=\frac{1}{6}$, его решения $x=\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi k$ (где $k\in Z$).

Ответ: $\pi+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi k$ (где $n, k\in Z$).

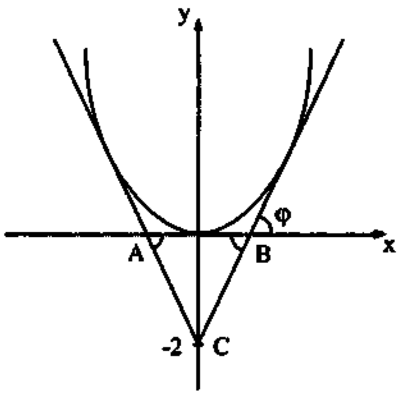
3. Разделим все части неравенства на 2 и перенесем все члены в левую часть $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>0$. Используем метод введения вспомогательного угла и запишем неравенство в виде: $\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x>0$ или $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>0$. Решая неравенство, получим $2\pi n<2x-\frac{\pi}{3}<\pi+2\pi n$ (где $n\in Z$), откуда $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+\pi n$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, где $n\in Z$.

4. В данном выражении выделим полные квадраты по переменным tg x и sin y и получим $A=2(\mathrm{tg}^2+4\,\mathrm{tg}\,x)+(\sin^2 y-6\sin y)=$ $=2(\mathrm{tg}\,x+2)^2+(\sin y-3)^2-17$. Это выражение состоит из числа -17 и двух неотрицательных выражений $2(\mathrm{tg}\,x+2)^2$ и $(\sin y-3)^2$. Учитывая ограниченность функции синус, получаем, что наименьшее значение выражения $2(\mathrm{tg}\,x+2)^2$ равно нулю (достигается при $\mathrm{tg}\,x=-2$ и $x=-\mathrm{arctg}\,2+\pi n$, где $n\in Z$) и наименьшее значение выражения $(\sin y-3)^2$ равно 4 (достигается при $\sin y=1$ и $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k\in Z$). Таким образом, наименьшее значение данного выражения A равно -13 и достигается при $x=-\mathrm{arctg}\,2+\pi n$ и $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (где $n, k\in Z$).

Ответ: -13.

5. Предположим, что касание с параболой происходит в точке с абсциссой x_0.



Напишем уравнение касательной $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$ или $y = 2x_0x - x_0^2$. Так как касательная проходит через точку $C(0; -2)$, то получаем уравнение $-2 = -x_0^2$, откуда $x_0 = \pm\sqrt{2}$. Найдем угловой коэффициент касательной BC: $\operatorname{tg}\varphi = 2x_0 = 2\sqrt{2}$, тогда $\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. Из ΔABC определим угол между касательными CA и CB: $\angle C = \pi - 2\varphi = \pi - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\pi - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

6. Пусть первое число $2x$, тогда второе число $-3x$, третье число – $(450 - 5x)$. Найдем произведение этих чисел $f(x) = 2x \cdot 3x \cdot (450 - 4x) \sim$ $\sim x^2 \cdot 450 - 5x^3$. Вычислим производную функции $f'(x) \sim 900x - 15x^2 =$ $= 15x(60 - x)$. Критические точки этой функции $x = 0$ и $x = 60$. Отметим эти точки на координатной оси и проставим знаки производной. Видно, что максимум функции достигается при $x = 60$.

Тогда искомые числа: $2x = 120$, $3x = 180$, $450 - 5x = 150$.

Ответ: 120; 180; 150.

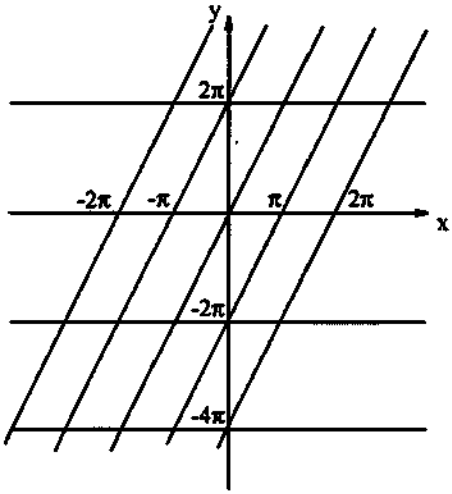
Вариант 2

1. Найдем более простую связь между переменными y и x. Для этого перенесем все члены равенства в левую часть $\cos(y - x) - \cos x = 0$ и преобразуем разность функций в произведение $2\sin\frac{2x - y}{2}\sin\frac{y}{2} = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Возникают два случая:

а) $\sin\frac{2x-y}{2}=0$, тогда $\frac{2x-y}{2}=\pi n$ и $y=2x-2\pi n$, где $n\in Z$;

б) $\sin\frac{y}{2}=0$, тогда $\frac{y}{2}=\pi k$ и $y=2\pi k$, где $k\in Z$.

Строим семейства полученных прямых.



Ответ: см. график.

2. Используем основное тригонометрическое тождество и получим уравнение $7(1-\sin^2 x)-13\sin x-13=0$ или $0=7\sin^2 x-13\sin x+6$. Введем новую переменную $t=\sin x$, получим квадратное уравнение $7t^2-13t+6=0$, корни которого $t_1=1$ и $t_2=\frac{6}{7}$. Вернемся к старой переменной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x=1$, его решения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ (где $n\in Z$);

б) $\sin x=\frac{6}{7}$, его решения $x=(-1)^k\arcsin\frac{6}{7}+\pi k$ (где $k\in Z$).

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^k\arcsin\frac{6}{7}+\pi k$ (где $n, k\in Z$).

3. Разделим все части неравенства на 2 и перенесем все члены в левую часть $\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x>0$. Используем метод введения вспомогательного угла и запишем неравенство в виде:

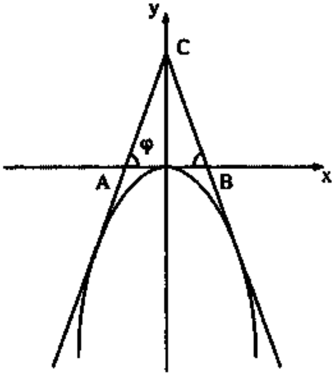
$\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x > 0$ или $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Решая неравенство, получим $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 3x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in Z$), откуда $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n.$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right)$, где $n \in Z$.

4. В данном выражении выделим полные квадраты по переменным ctg x и cos y и получим $A = 4(\text{ctg}^2 + 4\,\text{ctg}\,x) + (\cos^2 y + 4\cos y) = 4(\text{ctg}\,x + 2)^2 + (\cos y + 2)^2 - 20$. Это выражение состоит из числа -20 и двух неотрицательных выражений $4(\text{ctg}\,x + 2)^2$ и $(\cos y + 2)^2$. Учитывая ограниченность функции косинус, получаем, что наименьшее значение выражения $4(\text{ctg}\,x + 2)^2$ равно нулю (достигается при ctg $x = -2$ и $x = -\text{arcctg}(-2) + \pi n$, где $n \in Z$) и наименьшее значение выражения $(\cos y + 2)^2$ равно 1 (достигается при $\cos y = -1$ и $y = \pi + 2\pi k$, где $k \in Z$). Таким образом, наименьшее значение данного выражения A равно -19 и достигается при $x = -\text{arcctg}(-2) + \pi n$ и $y = \pi + 2\pi k$ (где $n, k \in Z$).

Ответ: -19.

5. Предположим, что касание с параболой происходит в точке с абсциссой x_0.



Напишем уравнение касательной $y = -6x_0(x - x_0) - 3x_0^2$ или $y = -6x_0x + 3x_0^2$. Так как касательная проходит через точку $C(0; 2)$, то получаем уравнение $2 = 3x_0^2$, откуда $x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдем угловой коэффициент касательной AC: $\operatorname{tg}\varphi = -6x_0 = -6\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{6}$, тогда $\varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$. Из ΔABC определим угол между касательными CA и CB: $\angle C = \pi - 2\varphi = \pi - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$.

Ответ: $\pi - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$.

6. Пусть первое число $3x$, тогда второе число $-4x$, третье число – $(420 - 7x)$. Найдем произведение этих чисел $f(x) = 3x\cdot 4x\cdot(420 - 7x) \sim \sim 420x^2 - 7x^3$. Вычислим производную функции $f'(x) \sim 840x - 21x^2 = = 21x(40 - x)$. Критические точки этой функции $x = 0$ и $x = 40$. Отметим эти точки на координатной оси и проставим знаки производной. Видно, что максимум функции достигается при $x = 40$.

Тогда искомые числа: $3x = 120$, $4x = 160$, $420 - 7x = 140$.

Ответ: 120; 160; 140.

Урок 102. Подведение итогов обучения

Цель: анализ результатов обучения и успехов учащихся.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основная часть

1. Анализ прохождения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно, с указанием причин: непонимание, отсутствие базовых знаний, незнание основных формул, арифметические ошибки и т.д.).

2. Личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости.

3. Краткая характеристика следующего учебного года (изучаемые темы, их сложности и применение в прикладных задачах).

4. Поздравления с окончанием учебного года и началом каникул.

Приложение

Демонстрационный вариант диагностической работы по математике

В течение примерно последних десяти лет происходят изменения в содержании и форме экзаменационных материалов по математике – **вводится единый государственный экзамен** (ЕГЭ). Если до сих пор ЕГЭ проводился в отдельных регионах страны и во многих случаях по выбору, то со следующего года такой экзамен **вводится повсеместно и в обязательном порядке для учащихся 11 классов.**

Третий год (в порядке эксперимента) в аналогичной форме в отдельных регионах проводится и экзамен **для учащихся 9 классов.** Велика вероятность, что скоро и такой экзамен станет обязательным и повсеместным.

С этого года (по крайней мере, в Москве) в школы стали поступать проверочные (диагностические) работы по математике **для 10 классов** по форме и содержанию близкие ЕГЭ. Вероятно, что эта **тенденция сохранится**, и к ней надо быть готовым. Поэтому рассмотрим хотя бы один вариант подобной работы.

Заметим, что автор против введения ЕГЭ по математике. По десятилетнему опыту существования ЕГЭ он **не решил ни одной поставленной задачи** (имеют место и утечка экзаменационных материалов, и коррупция, и необъективность оценок, и репетиторство и т.д.). Вместе с тем **уровень обучения** учащихся катастрофически упал, что связано со многими факторами (натаскивание на ЕГЭ вместо полноценного обучения, замена разнотипных форм контроля тестированием, трудность определения причин ошибок при тестировании и т.д.).

Вариант работы

На выполнение работы дается 90 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 21 задание.

Часть 1 содержит 13 заданий (A1–A10, B1–B3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа». К каждому заданию A1–A10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный (его надо указать). Ответом в заданиях B1–B3 является целое число или десятичная дробь. Правильный ответ надо записать в отведенном месте.

Часть 2 содержит 8 более сложных заданий (B4–B11) по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. Ответом в этих заданиях является целое число или десятичная дробь. Правильный ответ надо записать в отведенном месте.

Максимальная оценка за каждое из заданий составляет 1 балл. Решения задач не приводятся (тестирование).

Часть 1

A1. Вычислите: $7^{-17} : 49^{-9}$.

1) 7 2) $\frac{1}{7}$ 3) 1 4) 49

A2. Какое из чисел является наименьшим?

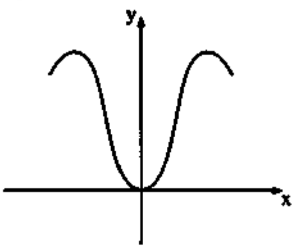
1) $\sin\frac{17\pi}{19}$ 2) $\sin\frac{21\pi}{19}$ 3) $\sin\frac{13\pi}{19}$ 4) $\sin\frac{9\pi}{19}$

A3. Выполните действия: $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[5]{a}}$:

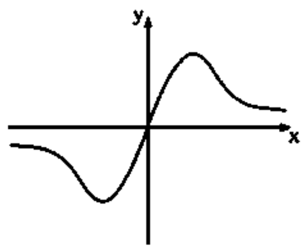
1) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$ 2) $\sqrt[6]{a}$ 3) 1 4) a

A4. На одном из рисунков изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.

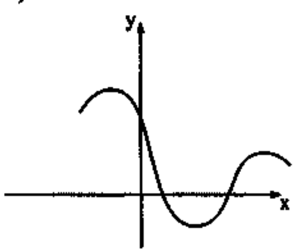
1)



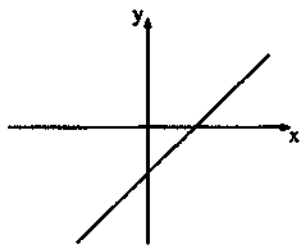
2)



3)



4)



A5. Найдите производную функции $y = 6\cos x + x^5$.

1) $y' = 6\sin x + 5x^4$ 2) $y' = -6\sin x + 5x^4$

3) $y' = 6\sin x + \frac{x^6}{6}$ 4) $y' = -6\sin x + 5x^5$

A6. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{20 - 16\cos x}$.

1) $[2; 6]$ 2) $(-\infty; +\infty)$
3) $[0; +\infty)$ 4) $[0; 6]$

A7. Решите уравнение $\sin\dfrac{x}{6}=1$.

1) $3\pi + 3\pi n$ 2) $12\pi n$
3) $3\pi + 12\pi n$ 4) $6\pi + 6\pi n$, где $n \in Z$

A8. Решите неравенство $\dfrac{7}{x}<1$.

1) $(7; +\infty)$ 2) $(-\infty; 0)\cup(7; +\infty)$
3) $(+\infty; 7)$ 4) $(0; 7)$

A9. Найдите значения производной функции $y = 6\,\mathrm{tg}\,x$ при $x=\dfrac{\pi}{6}$.

1) 8 2) 24
3) 12 4) 4

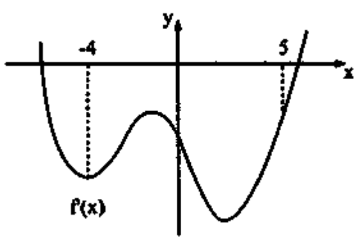
A10. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-7}{2-x}}$.

1) $(2; 7)$ 2) $(-\infty; 2]\cup(7; +\infty)$
3) $(2; 7]$ 4) $(-\infty; 2)\cup(7; +\infty)$

B1. Найдите значения выражения $\dfrac{\sin 2\alpha}{6\sin\alpha}$, если $\cos\alpha = 0,6$.

B2. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-x-20}=-x$.

B3. Функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой. По графику производной этой функции, изображенному на рисунке, определите, в какой точке отрезка $[-4; 5]$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на этом отрезке.



Часть 2

B4. Вычислите $\sqrt{5}-\sqrt{9-4\sqrt{4}}$.

B5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y=f(x)$ в точке $A(-5; 10)$. Найдите $f'(-5)$.

B6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $(x^2-x-6)(7-\sqrt{\cos\pi x-1})\le 0$?

B7. Вычислите значение выражения $\sqrt[3]{\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}$.

B8. Решите уравнение $4x^2+20x+30=(\sqrt{5}-\sin 2\pi x)(\sqrt{5}+\sin 2\pi x)$.

B9. Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 2π. Найдите значение выражения $A=f\left(\frac{7\pi}{3}\right)\cdot\left(f(-5\pi)+f(6\pi)\right)$, если $f(0)=5$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$ и $f(\pi)=1$.

B10. Точка K удалена от каждой из вершин квадрата $ABCD$, сторона которого равна $8\sqrt{2}$, на расстояние, равное 10. Найдите расстояние от точки K до плоскости квадрата.

B11. Диагонали трапеции равны $\sqrt{19}$ и 9, а ее средняя линия равна 5. Найдите косинус угла между прямыми, содержащими диагонали трапеции.

Разбор заданий работы

Часть 1

A1. Используя свойства степеней, получаем $7^{-17}:49^{-9}=7^{-17}(7^2)^{-9}=$ $=7^{-17}:7^{-18}=7^{-17+18}=7^1=7$.

Правильный ответ 1.

A2. Рассмотрим аргументы синуса. Углы $\frac{17\pi}{19}$ и $\frac{13\pi}{19}$ принадлежат II четверти, угол $\frac{9\pi}{19}$ – I четверти. Для всех этих углов значение синуса положительно. Угол $\frac{21\pi}{19}$ лежит в III четверти и синус такого угла отрицательный. Поэтому наименьшее число $\sin\frac{21\pi}{19}$.

Правильный ответ 2.

A3. Перейдем к рациональным показателям степени и учтем свойства степеней. Получаем: $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[5]{a}}=\frac{\left(a\cdot a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{5}}}=\frac{\left(a^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{5}}}=\frac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}}=1$.

Правильный ответ 3.

A4. График четной функции симметричен относительно оси ординат. Таким свойством обладает только график 1.

Правильный ответ 1.

А5. Используя свойства и таблицу производных, имеем: $y' = (6\cos x + x^5)' = 6(\cos x)' + (x^5) = -6\sin x + 5x^4$.

Правильный ответ 2.

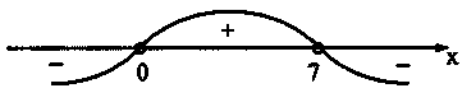
А6. В силу ограниченности функции косинус получаем неравенство $-1 \le \cos x \le 1$. Умножим все части неравенства на отрицательное число (−16). При этом знак неравенства меняется на противоположный. Имеем: $16 \ge -16\cos x \ge -16$ или $-16 \le -16\cos x \le 16$. Ко всем частям неравенства прибавим число 20: $4 \le 20 - 16\cos x \le 36$. Наконец, из всех неотрицательных частей неравенства извлечем квадратный корень и получим: $2 \le \sqrt{20 - 16\cos x} \le 6$ или $2 \le y \le 6$, то есть $E(y) = [2; 6]$.

Правильный ответ 1.

А7. Используя единичную окружность, запишем решения уравнения $\sin\frac{x}{6} = 1$ и получим $\frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in Z$), откуда $x = 3\pi + 12\pi n$.

Правильный ответ 3.

А8. Решим неравенство $\frac{7-x}{x} < 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$.

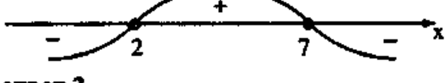


Правильный ответ 2.

А9. Сначала найдем производную данной функции $y' = (6\operatorname{tg} x) = \frac{6}{\cos^2 x}$. Найдем значение производной при $x = \frac{\pi}{6}$ и получим $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8$.

Правильный ответ 1.

А10. Область определения функции задается условием $\frac{x-7}{2-x} \ge 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим $x \in (2; 7]$. Итак, область определения функции $D(y) = (2; 7]$.



Правильный ответ 3.

В1. Используем формулу для синуса двойного угла и упростим выражение $\frac{\sin 2\alpha}{6\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{6\sin\alpha} = \frac{1}{3}\cos\alpha$. При $\cos\alpha = 0{,}6$ это выражение равно $\frac{1}{3}\cdot 0{,}6 = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

В2. При решении уравнения $\sqrt{2x^2 - x - 20} = -x$ учтем, что $-x \ge 0$ (то есть $x \le 0$). Возведем в квадрат обе части уравнения: $2x^2 - x - 20 = x^2$ (при этом подкоренное выражение равно квадрату некоторой величины и неотрицательно) или $x^2 - x - 20 = 0$. Корни этого уравнения $x = -4$ и $x = 5$ (не подходит, так как $x \le 0$).

Ответ: −4.

В3. При всех значениях x из отрезка $[-4;\ 5]$ значения производной $f'(x) < 0$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на данном отрезке. Тогда функция достигает наименьшего значения на правой границе отрезке, то есть при $x = 5$.

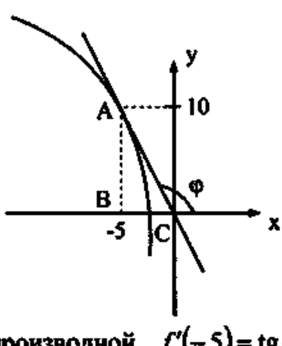
Ответ: 5.

Часть 2

В4. Учтем, что второе подкоренное выражение является квадратом разности. Получаем $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2 + 2^2} = \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - \left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 2$. Было учтено, что $\sqrt{5} > 2$ и $\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2$.

Ответ: 2.

В5.



По определению производной $f'(-5) = \operatorname{tg}\varphi$. Из ΔABC найдем $\operatorname{tg}C = \frac{AB}{BC} = 2$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180^\circ - C) = -\operatorname{tg}C = -2$. Итак, $f'(-5) = -2$.

Ответ: −2.

В6. Учтем ОДЗ неравенства: $\cos\pi x-1\ge 0$. Неравенство выполняется только при условии $\cos\pi x=1$, учитывая ограниченность функции косинус. Очевидно, что выражение во вторых скобках положительно. Разделим обе части неравенства на это выражение (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $x^2-x-6\le 0$. Таким образом, данное неравенство равносильно системе $\begin{cases}\cos\pi x=1\\ x^2-x-6\le 0\end{cases}$. Решая ее, получаем $\begin{cases}x=2n,\text{ где } n\in Z\\ -2\le x\le 3\end{cases}$. Поэтому система (и данное неравенство) имеет три целочисленных решения $\{-2:0:2\}$.

Ответ: 3.

В7. Используем формулу преобразования произведения функций в сумму и получим $\sqrt[3]{\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)}=$
$=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=0,5.$

Ответ: 0,5.

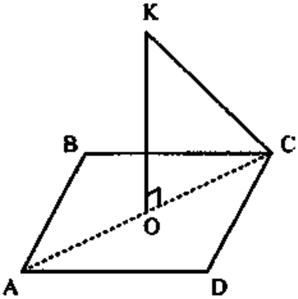
В8. Используя формулу разности квадратов, запишем уравнение в виде: $4x^2+20x+30=5-\sin^2 2\pi x$ или $(2x+5)^2+\sin^2 2\pi x=0$. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных выражений. Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases}2x+5=0\\ \sin^2 2\pi x=0\end{cases}$, которая имеет единственное решение $x=-\frac{5}{2}=-2,5.$

Ответ: −2,5.

В9. Учтем свойство периодической функции $f(x+nT)=f(x)$, где T – наименьший положительный период функции и $n\in Z$. Сведем аргументы функции к тем, в которых значения функции известны. Получаем $A=f\left(\frac{7\pi}{3}\right)\cdot\left(f(-5\pi)+f(6\pi)\right)=f\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)\cdot(f(\pi-3\cdot 2\pi)+$
$+f(0+3\cdot 2\pi))=f\left(\frac{\pi}{3}+T\right)\cdot\left(f(\pi-3T)+f(0+3T)\right)=$
$=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(f(\pi)+f(0)\right)=4(1+5)=24.$

Ответ: 24.

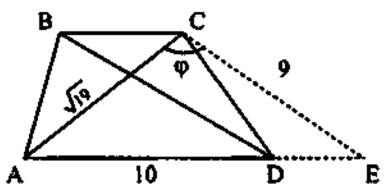
B10.



Очевидно, что точка K проецируется в центре O квадрата $ABCD$. Найдем диагональ квадрата $AC = AD \cdot \sqrt{2} = 16$ и ее половину $OC = \frac{1}{2} AC = 8$. Из прямоугольного ΔKOC найдем по теореме Пифагора расстояние от точки K до плоскости квадрата $KO = \sqrt{KC^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Ответ: 6.

B11.



Пусть в трапеции $ABCD$ диагонали $AC = \sqrt{19}$ и $BD = 9$, средняя линия 5. Построим отрезок $CE \| BD$. Угол между диагоналями $\varphi = \angle ACE$, $AD + DE = 10$ (удвоенная средняя линия). Тогда в ΔAEC известны все стороны: $AC = \sqrt{19}$, $CE = 9$ и $AE = 10$. Легко проверить, что выполняется теорема Пифагора: $AE^2 = AC^2 + CE^2$ или $10^2 = (\sqrt{19})^2 + 9^2$. Поэтому $\varphi = 90°$ и $\cos\varphi = 0$.

Ответ: 0.

Литература

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1972.

2. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: Справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988.

3. *Деницева Л.О., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др.* ЕГЭ. Математика. 2003–2004. – М.: Просвещение, 2003.

4. *Дорофеев Г.В., Седова Е.А., Шестаков С.А.* ЕГЭ. Математика. 2007–2008. – М.: Эксмо, 2007.

5. *Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992.

6. *Зеленский А.С., Василенко О.Н.* Сборник задач вступительных экзаменов по математике. – М.: НТЦ «Университетский», 2001.

7. *Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.* Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – М.: Просвещение, 2007.

8. *Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др.* Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2001.

9. *Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н. и др.* 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 2000.

10. *Иванов А.С., Майоров Ю.К., Рурукин А.Н.* Сборник задач по тригонометрии и началам анализа. – М.: МИФИ, 1991.

11. *Мирошин Н.В., Баскаков А.В., Михайлов П.А. и др.* Математика: Сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М.: Астрель, 2002.

12. *Рурукин А.Н.* Решение задач по алгебре и геометрии для учащихся 9 класса. – М.: МИФИ, 2007.

13. *Рурукин А.Н.* Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа 10–11 кл. (А.Н. Колмогоров и др.). – М.: ВАКО, 2004.

14. *Рурукин А.Н.* Ответы и решения к экзаменационным заданиям из сборника Г.В. Дорофеева и др. Математика 11 класс. – М.: Интектэл, 2003.

15. *Рурукин А.Н.* Математика: Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.

16. *Хачатурьян И.В.* Практическое руководство по решению задач по алгебре в 7–9 классах. – М.: Яхонт, 2000.

17. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1988.

18. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.

19. *Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И.* Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 класс. – М.: Астрель, 2006.

20. *Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. и др.* Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы. – М.: МИОО, 2002.

21. *Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. и др.* Экзаменационные работы для проведения итоговой аттестации по алгебре и началам анализа за курс средней школы. – М.: МИОО, 2004,

Оглавление

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК А.Н. Колмогорова и др. (*М.: Просвещение*)

10 класс

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати 21.07.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 18,48. Тираж 5000 экз. Заказ № 3885.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати – ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru